

ANAHTAR



TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2015-2016 GÜZ DÖNEMİ
MAT 101, MATEMATİK I, FİNAL SINAVI
12 ARALIK 2015

Adı Soyadı:

No:

İMZA:

1. (20 p.)	2. (20 p.)	3. (10 p.)	4. (16 p.)	5. (10 p.)	6. (24 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir.
Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. (a) $f(x) = x^{\cos(\pi x)}$ ise $f'(1) = ?$

$$\begin{aligned} y &= x^{\cos(\pi x)} \Rightarrow \ln y = \cos(\pi x) \ln x \\ \Rightarrow \frac{y'}{y} &= -\pi \sin(\pi x) \ln x + \cos(\pi x) \cdot \frac{1}{x} \\ \Rightarrow f'(x) &= x^{\cos(\pi x)} \left[-\pi \sin(\pi x) \ln x + \frac{\cos(\pi x)}{x} \right] \\ \Rightarrow f'(1) &= 1^{\cos(\pi)} \left[-\pi \sin \pi \ln 1 + \frac{\cos(\pi)}{1} \right] \\ \Rightarrow f'(1) &= 1 \cdot [0 - 1] = -1. \end{aligned}$$

(b) $x = 2 \cos \theta$, $y = \sin 2\theta$ parametrik denklemleriyle verilen eğrinin **düşey** teğete sahip olduğu noktaları bulunuz.

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2 \cos 2\theta}{-2 \sin \theta} = -\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}$$

Düşey teğete sahip olması, o noktada eğimin (\pm sonsuz) olması demek.
O halde;

$$\frac{dy}{dx} = \pm \infty \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\theta = 0, \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} x=2 \quad y=0 \\ x=-2 \quad y=0 \end{array} \right\} \text{ ilki noktada düşey teğet vardır: } (2,0) \text{ ve } (-2,0)$$

2. Aşağıdaki limitleri (eğer varsa) hesaplayınız.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x \quad (0 \cdot \infty \text{ belirsizliği}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{L'Hospital} \\ \text{kullanarak} \end{array} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(-\sin x) \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right] \\ &= 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x)^{1/x}$

$y = (e^x - x)^{1/x}$ olsun. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x}$

o halde $y = e^{\frac{1}{x}}$. $\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^1 = e$.

$$\begin{aligned} \text{L.H} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1 \end{aligned}$$

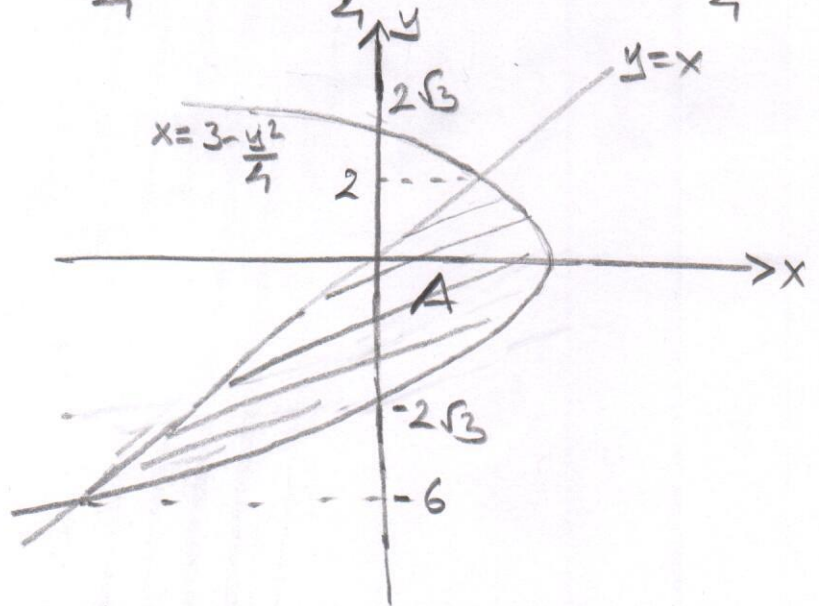
3. $4x = 12 - y^2$ ve $y = x$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$4x = 12 - y^2 \Rightarrow x = \frac{12 - y^2}{4} = 3 - \frac{y^2}{4} \Rightarrow x = 3 - \frac{y^2}{4}$$

Kesim noktaları

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 3$$



Kesim noktaları

$$y = x \text{ ve } x = 3 - \frac{y^2}{4}$$

$$\text{ise } y = 3 - \frac{y^2}{4}$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y - 12 = 0$$

$$\begin{matrix} \wedge \\ 6 - 2 \end{matrix}$$

$$(y+6)(y-2) = 0$$

$$\Rightarrow y = -6 \text{ ve } y = 2$$

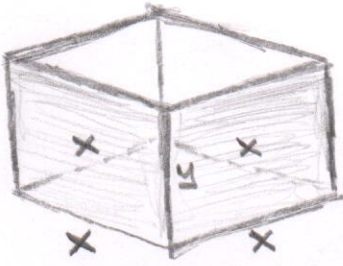
o halde

$$A = \int_{-6}^2 \left(3 - \frac{y^2}{4} - y \right) dy = \left[3y - \frac{y^3}{12} - \frac{y^2}{2} \right] \Big|_{-6}^2$$

$$= \left(6 - \frac{8}{12} - \frac{4}{2} \right) - \left(-18 + \frac{216}{12} - \frac{36}{2} \right)$$

$$= \frac{10}{3} - (-18) = \frac{64}{3}$$

4. Hacmi 500 cm^3 , tabanı kare ve üstü açık olan bir prizma kutunun yüzey alanının en küçük olması için bu kutunun boyutları ne olmalıdır?



$$\text{Hacim: } V = x \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y \Rightarrow x^2 \cdot y = 500$$

$$\text{Yüzey Alanı: } S = x^2 + 4xy$$

$$x^2 \cdot y = 500 \Rightarrow y = \frac{500}{x^2}$$

$$S = x^2 + 4xy \Rightarrow S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{500}{x^2}$$

$$\Rightarrow S(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$$

$$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2x^3 - 2000}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \text{Kritik noktalar } x=0 \text{ ve } x=10 \text{ bulur}$$

$$S''(x) = 2 + \frac{2000}{x^3} \Rightarrow S''(10) > 0 \text{ old için 2. türev } x=10 \text{ bir minimum noktadır.}$$

0 halde $x=10 \text{ cm}$ ve $y=5 \text{ cm}$ olur

5. Aşağıdaki (has olmayan) integralin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz ve yakınsak ise hesaplayınız.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} + \int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

I_1 I_2

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

$$= \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 \frac{du}{u^2 + 1} = \lim_{r \rightarrow -\infty} \arctan u \Big|_r^0 = \arctan 1 - \lim_{r \rightarrow -\infty} \arctan r$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \\ x=r \Rightarrow u=e^r \\ x=0 \Rightarrow u=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{dv}{v^2 + 1} = \lim_{r \rightarrow \infty} \arctan e^r - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} v = e^x \\ dv = e^x dx \\ x=r \Rightarrow v=e^r \\ x=0 \Rightarrow v=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\therefore I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}$$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$(a) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$x = \sin \theta \Rightarrow dx = \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta}} \\ &= \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta (\cos \theta)} = \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} = \int \csc^2 \theta d\theta \\ &= -\cot(\theta) + C \\ &= -\cot(\arcsin x) + C, \quad C \text{ bir sabit.} \end{aligned}$$

$$(b) \int_0^{\pi^2/4} \cos \sqrt{x} dx = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot 2t dt = 2t \sin t \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \sin t dt$$

$$t = \sqrt{x}$$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$2t dt = dx$$

$$u = t \quad dv = \cos t dt$$

$$du = dt \quad v = \sin t$$

$$= \pi + 2 \cos t \Big|_0^{\pi/2} = \pi - 2$$

$$(c) \int \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx$$

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = x + 1$$

$$A+B=0 \Rightarrow B=-1$$

$$A=1$$

$$C=1$$

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx = \ln|x| + \arctan x - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$