ANAHTAR

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2015-2016 GÜZ DÖNEMİ
MAT 101, MATEMATİK I, FİNAL SINAVI
12 ARALIK 2015

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (20 p.)	2. (20 p.)	3. (10 p.)	4. (16 p.)	5. (10 p.)	6. (24 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. (a) $f(x) = x^{\cos(\pi x)}$ ise $f'(1) = ?$

$$y = x^{\cos(\pi x)} \Rightarrow \ln y = \cos(\pi x)\ln x$$
$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -\pi\sin(\pi x)\ln x + \cos(\pi x)\cdot\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow f'(x) = x^{\cos(\pi x)}\left[-\pi\sin(\pi x)\ln x + \frac{\cos(\pi x)}{x}\right]$$
$$\Rightarrow f'(1) = 1^{\cos(\pi)}\left[-\pi\sin\pi\ln 1 + \frac{\cos(\pi)}{1}\right]$$
$$\Rightarrow f'(1) = 1\cdot[0-1] = -1.$$

(b) $x = 2\cos\theta$, $y = \sin 2\theta$ parametrik denklemleriyle verilen eğrinin **düşey** teğete sahip olduğu noktaları bulunuz.

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2\cos 2\theta}{-2\sin\theta} = -\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$$

Düşey teğete sahip olması, o noktada eğimin ($\pm$sonsuz) olması demek.

o halde;

$$\frac{dy}{dx} = \pm\infty \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\theta = 0, \pi$$

$$\left.\begin{array}{ll} x = 2 & y = 0 \\ x = -2 & y = 0 \end{array}\right\}$$ iki noktada düşey teğet vardır! $(2,0)$ ve $(-2,0)$

2. Aşağıdaki limitleri (eğer varsa) hesaplayınız.

(a) $\lim_{x\to 0^+} \sin x \ \ln x$

$$L = \lim_{x\to 0^+} \sin x . \ln x \ (0.\infty \text{ belirsizliği}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\begin{pmatrix}\text{L'hospital} \\ \text{kullanıcak}\end{pmatrix} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \left[(-\sin x).\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}\right]$$

$$= 0.1.1 = 0 \ //$$

(b) $\lim_{x\to\infty} (e^x - x)^{1/x}$

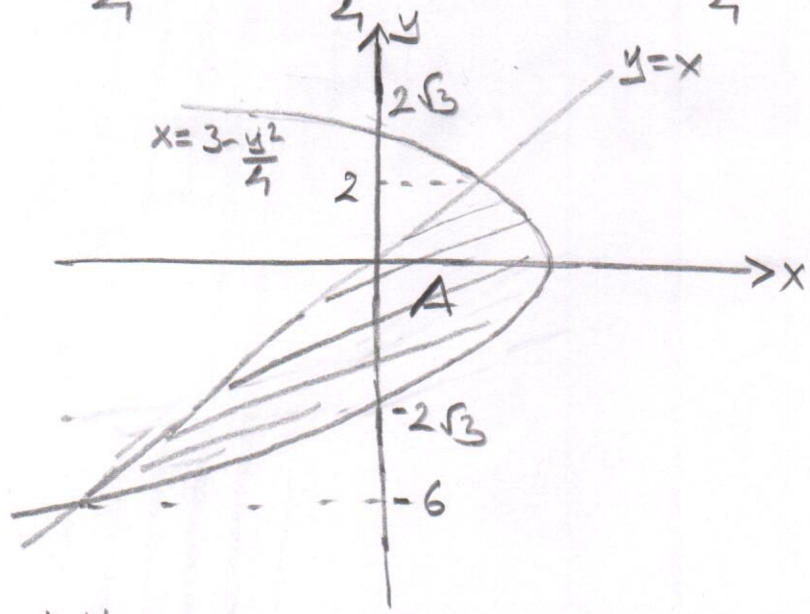
$y = (e^x - x)^{1/x}$ olsun. $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x}$

O halde $y = e^{1/\ln x}$. $\lim_{x\to\infty} y = e^1 = e$.

$$\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L.H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} \underset{L.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1$$

3. $4x = 12 - y^2$ ve $y = x$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$4x = 12 - y^2 \Rightarrow x = \frac{12 - y^2}{4} = 3 - \frac{y^2}{4} \Rightarrow x = 3 - \frac{y^2}{4}$$



Kesim noktaları

$x = 0 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$

$y = 0 \Rightarrow x = 3$

Kesişim noktaları

$y = x$ ve $x = 3 - \frac{y^2}{4}$

ise $y = 3 - \frac{y^2}{4}$

$\Rightarrow y^2 + 4y - 12 = 0$

6 -2

$(y+6)(y-2) = 0$

$\Rightarrow y = -6$ ve $y = 2$

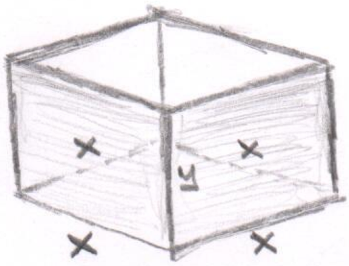
O halde

$$A = \int_{-6}^{2} \left(3 - \frac{y^2}{4} - y\right) dy = \left[3y - \frac{y^3}{12} - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{-6}^{2}$$

$$= \left(6 - \frac{8}{12} - \frac{4}{2}\right) - \left(-18 + \frac{216}{12} - \frac{36}{2}\right)$$

$$= \frac{10}{3} - (-18) = \frac{64}{3}$$

4. Hacmi 500 cm^3, tabanı kare ve üstü açık olan bir prizma kutunun yüzey alanın en küçük olması için bu kutunun boyutları ne olmalıdır?



Hacim: $V = x \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y \Rightarrow x^2 \cdot y = 500$

Yüzey Alanı: $S = x^2 + 4xy$

$x^2 \cdot y = 500 \Rightarrow y = \dfrac{500}{x^2}$

$S = x^2 + 4xy \Rightarrow S(x) = x^2 + 4x \cdot \dfrac{500}{x^2}$

$\Rightarrow S(x) = x^2 + \dfrac{2000}{x}$

$S'(x) = 2x - \dfrac{2000}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2000}{x^2}$

$S'(x) = 0 \Rightarrow$ Kritik noktalar $x = 0$ ve $x = 10$ bulur

$S''(x) = 2 + \dfrac{2000}{x^3} \Rightarrow S''(10) > 0$ old için 2. türev $x = 10$ bir minimum noktadır.

O halde $\boxed{x = 10cm \text{ ve } y = 5cm}$ ol

5. Aşağıdaki (has olmayan) integralin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz ve yakınsak ise hesaplayınız.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \lim_{r \to -\infty} \int_{r}^{0} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

$\left[\begin{array}{l} u = e^x \\ \Rightarrow du = e^x dx \\ x = r \Rightarrow u = e^r \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \end{array}\right] \Rightarrow$

$$= \lim_{r \to -\infty} \int_{e^r}^{1} \frac{du}{u^2 + 1} = \lim_{r \to -\infty} \arctan u \Big|_{e^r}^{1} = \arctan 1 - \lim_{r \to -\infty} \arctan \ldots$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \lim_{r \to \infty} \int_{0}^{r} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

$\left[\begin{array}{l} v = e^x \\ dv = e^x dx \\ x = r \Rightarrow v = e^r \\ x = 0 \Rightarrow v = 1 \end{array}\right]$

$$= \lim_{r \to \infty} \int_{0}^{e^r} \frac{dv}{v^2 + 1} = \lim_{r \to \infty} \arctan e^r - \arctan 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \; I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}$$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

$$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$x = \sin\theta \Rightarrow dx = \cos\theta d\theta$

$$= \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sin^2\theta(\cos\theta)} = \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta} = \int \csc^2\theta \, d$$

$$= -\cot(\theta) + c$$

$$= -\cot(\arcsin x) + c \quad , \quad c \text{ bir sabi-}$$

(b) $\int_0^{\pi^2/4} \cos\sqrt{x}\, dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot 2t\, dt = 2t\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\pi/2} \sin t\, dt$

$t = \sqrt{x}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$2t\,dt = dx$

$u = t \quad dv = \cos t\, dt$

$du = dt \quad v = \sin t$

$$= \pi + 2\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

(c) $\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\, dx$

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}$$

$Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = x+1$

$A + B = 0 \Rightarrow B = -1$

$A = 1$

$C = 1$

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx = \ln x + \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$