

3.6 Kapalı Fonksiyonların Türevi

• Verilen kapalı fonksiyonlar için y' i bulunuz.

① $x^3 + x^2y - 2xy^2 + y^3 = 1$

② $x \sin(xy) + \cos(xy) = 0$

③ $x + y^2 = \sin(xy)$

④ $x\sqrt{x+y} = 2xy^2$

⑤ $\sin(xy) = \cos(y^2)$

• Aşağıda belirtilen değerleri bulunuz

① $y'(0)$, $x^5 - xy + y^3 = 8$

② $y' \left| \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right.$, $x^2 = \sin^2(xy) + xy - \frac{1}{2}$

③ $y'' \left| \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \right.$, $x^2 = \sin^2(xy) + xy - \frac{1}{2}$

• Aşağıdaki nokteler için belirtilen noktadan geçen tepe ve normal doğrularının denklemlerini yazınız

① $x^3 + x^2y - 2xy^2 + y^3 = 1$, $P(1,0)$

② $\sin(xy) + y = x^2$, $P(0,0)$

③ $e^{xy} + y^2 \sin(\pi x) - e = 0$, $P(1,1)$

④ $x^2 - y \sin(x+y) = 1$, $P(1,-1)$

3.7 Ters Fonk. ve Logaritma Fonk. Türevleri

① $f(x) = x^3 + x + 1$ olsun

Ⓐ $f(x)$ in birebir olduğunu gösteriniz

Ⓑ $g = f^{-1}$ ise $g'(3) = ?$

② $f(x) = x^2 - 4x - 5$ olsun

Ⓐ $x > 2$ için $f(x)$ in birebir olduğunu gösteriniz.

Ⓑ $\frac{df^{-1}}{dx} \Big|_{x=f(5)=0} = ?$

• Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini logaritmik türev yardımıyla bulunuz.

① $f(x) = (1+x)^{2/3} (2-x)^{1/3} (1+x^2)^{3/2} (1+\ln x)^{1/2}$

② $y = \frac{x^{7/4} \sqrt{x^2+1}}{(3x+5)^5}$

③ $y = x^{\sqrt{x+1}}$

④ $y = \frac{\sin^2 x \tan^4 x}{(x^2+1)^4}$

⑤ $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

• Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

① $\ln \left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \right)$

② $\log_{10} \left(\frac{x}{x-1} \right)$

③ $\frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$

④ $\ln \sqrt{\frac{2x+2}{x}}$

3.8 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

- ① $\sin(\arctan(x+1)) = ?$
- ② $f(x) = \arcsin(\sin \sqrt{x^2+9})$ ise $f'(x) = ?$
- ③ $f(x) = \arccos(\tan \sqrt{x^2+1})$ ise $f'(x) = ?$
- ④ $f(x) = \frac{\operatorname{arcsec}(x^2+1)}{\tan(2x+1)}$ ise $f'(x) = ?$
- ⑤ $f(x) = \frac{1}{\arcsin(x)}$ ise $f'(x) = ?$
- ⑥ $f(x) = x \arctan(\sqrt{x})$ ise $f'(x) = ?$
- ⑦ $f(x) = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + \arccos(x)$ ise $f'(x) = ?$
 $x \in (0,1)$

3.9 Bazı Oranlar

- ① Bir çemberin yarıçapı 2 cm/s sabit hızla büyüyor. Çevre uzunluğu 200π cm olduğunda, çemberin alanındaki değişim hızı nedir?
- ② İki araba aynı noktadan hareket ediyor. Bir 60 km/h hızla doğuya, diğeri 20 km/sa hızla batıya doğru gidiyor. 2 saat sonra arabalar arasındaki uzaklığın artış hızı ne olur?
- ③ Bir üçgenin alanı $2 \text{ cm}^2/\text{da}$ oranında artarken, yüksekliği $1 \text{ cm}/\text{da}$ oranında artıyor. Üçgenin yüksekliği 10 cm ve alanı 100 cm^2 olduğunda tabanın değişim hızı nedir?
- ④ 1 km yükseklikte ve 500 km/sa hızla yatay olarak uçan bir uçak, bir radar istasyonu üzerinden geçiyor. Uçak istasyondan 2 km uzakta olduğunda, uçaktan istasyona olan uzaklığın artış hızı ne olur.

3.10 Doğrusal Yaklaşımlar ve Diferansiyeller

① $f(x) = x^2 + 2e^{2(x-1)}$ ise $x=1$ deki doğrusal yaklaşımını bulunuz. Hangi x değerleri için hata 0.01 den küçük olur?

② $f(x) = \frac{1}{x-1}$ olsun.

a) $x=3$ de $f(x)$ in doğrusal yaklaşımını bulunuz. ($L(x)=?$)

b) $L(x)$ kullanılarak $(3-h, 3+h)$ aralığında $f(x)$ yaklaşık olarak hesaplanırsa, hatanın 0.001 den küçük olması için h en fazla kaç olabilir.

③ $f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + 5$ olsun

a) $x=1$ de $f(x)$ in doğrusal yaklaşımını bulunuz ($L(x)=?$)

b) Hata fonksiyonunu bulunuz. ($|f(x) - L(x)|$)

c) $x \in [1-h, 1+h]$ olduğunda hata $\leq \frac{1}{100}$ ise

h en fazla kaç olabilir.

④ $f(x) = x^3 + 2x - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ olsun.

dx ve dy diferansiyellerini kullanarak $f(1.02)$ yi bulunuz.

⑤ Doğrusal yaklaşım kullanarak aşağıdaki ifadeleri yaklaşık olarak bulunuz.

a) $\sqrt{10}$ b) $\sin \frac{1}{10}$ c) $\sqrt{4.01}$ d) $\sqrt[3]{26}$

⑥ $ye^x + xe^y + y = x+2$ ise $f(0.01)$ i doğrusal

yaklaşım kullanarak yaklaşık olarak bulunuz.

4.1 Parabolün Elitremum Değerleri

① $f(x) = 2x^2 - 6x + 6$ ise yerel maksimum / minimum değerlerini bul.

② $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ ise ---

③ $f(x) = |x^2 - 1|$

④ $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

⑤ $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$

⑥ $f(x) = x \ln x$

⑦ $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$

⑧ $f(x) = xe^{-x}$, $x \in [0, 2]$

⑨ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in [1, 3]$

4.2 Ortalama Değer Teoremi ve

Rolle Teoremi

- ① $P(x) = 10x^4 - 5x - 4$ denkleminin kaç reel kökü vardır?
- ② Aşağıdaki fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi'ni sağlayan "c" noktasını bulunuz.
 - a) $f(x) = x^2 + x$, $x \in [0, 1]$
 - b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$, $x \in [0, 3]$
- ③ $2^{x^2} + x^4 - 3 = 0$ denkleminin kaç reel kökü vardır.
- ④ $x^5 + x - 1$ in sadece bir kökü olduğunu gösteriniz.
- ⑤ $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ fonksiyonu $[0, 10]$ aralığında tanımlansın.

Ortalama Değer Teoremi'ni sağlayan kaç farklı

"c" değeri vardır? (c değerlerini bulmanıza gerek yoktur)

- ⑥ $f(x) = x^3 + 2x - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ denkleminin sadece bir reel kökü olduğunu gösteriniz.
- ⑦ $f(x) = x^5 + 15x - 1$ fonksiyonunun sadece bir ^{reel} kökü olduğunu gösteriniz.
- ⑧ $f(x) = \sin x + \cos x - 2x + 5 = 0$ denkleminin en az bir kökü olduğunu gösteriniz. Toplam kaç kökü vardır?

4.3 Monoton Fonk. ve Birinci Türev Testi

- ① $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x + 1$ in artan olduğu aralıkları bulunuz.
- ② $f(x) = x^2(x-1)$ in artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.
- ③ $f(x) = |x^2 - 4|$ in
- ④ $f(x) = \sin x$
- ⑤ $f(x) = 7x^3 - 3x^7$
- ⑥ $f(x) = x\sqrt{5-x}$
- ⑦ $f(x) = 2\cos x + \sin^2 x$, $x \in [-\pi, \pi]$
- ⑧ $f(x) = \ln(1+x^2)$

4.4: Döner Yardımıyla Bir Fonksiyonun Grafiğinin Çizimi

Aşağıdaki fonksiyonların grafikleri çiziniz. Eğer varsa asimptotlarını belirtiniz.

① $y = 1 - \frac{1}{x}$

② $y = \frac{1}{x+1} - 1$

③ $y = \frac{4}{x+3 - \sqrt{x^2 - 2x + 5}}$

④ $y = x - 1 + \frac{4}{x-3}$

⑤ $y = x \tan x$

⑥ $y = x \ln x$

⑦ $y = \frac{e^x - 1}{x(x-1)}$

⑧ $y = \frac{2x+1}{x-1}$

⑨ $y = x^2 e^{-x}$

⑩ $y = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$

4.5 Maksimum - Minimum Problemleri

① Çarpımları 12, toplamı maksimum olan iki pozitif tam sayı bulunur.

② Alanı 1300 m² olan dikdörtgenler içinde, çevre uzunluğu en küçük olanın boyutlarını bulunuz.

③ 10 m uzunluğundaki bir tel iki parçaya kesiliyor. Bir parçasından kare, diğer parçasından eşkenar üçgen yapılıyor, kapatılan toplam alanın

a) maksimum b) minimum

olması için tel nasıl kesilmelidir.

④ 30 cm genişliğindeki bir metal levha şekildedir. Şerhi kıvrılıyor ve üstü kapatılıyor.



Alanı maksimum yapan θ açısını bulunuz.

⑤ 12000 cm² lik bir malzemeden tabanı kare üstü açık bir kutu yapılmak istenirse, en büyük hacimli kutunun boyutları ne olur.

4.6: Belirli Durumlar ve L'Hopital Kuralı

4.8 Anti-Türev

• Aşağıdaki limitleri bulunuz.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{12x^2}$$

$$(3) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta \sin \theta}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{4x^3 - 2x^2 + 5x + 3}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x} \right)$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sin x}{3x + \sin x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) - x^2}{x^2 \sin x}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} x 2^{-\sqrt{x}}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\ln x}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{1}{\ln x}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x^3}}{9^{x^2}}$$

• Aşağıdaki fonk. anti-türevlerini bulunuz.

$$(1) \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

$$(2) -\pi \sin(\pi x)$$

$$(3) 1 - \delta \sec^2(2x)$$

$$(4) e^{3x}$$

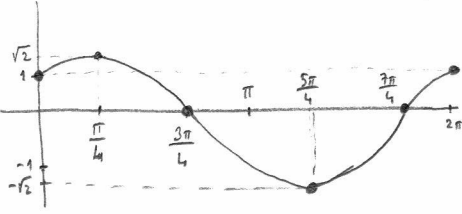
$$(5) x^{\sqrt{3}}$$

$$(6) x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

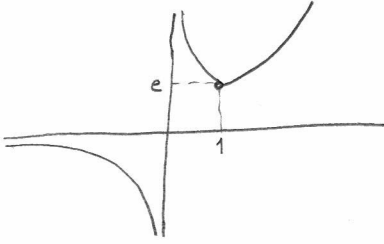
$$(7) \pi^x - x^{-1}$$

GRAFİK GİRİME

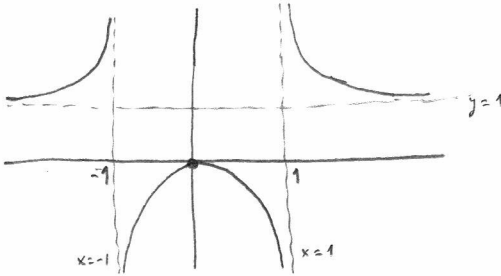
ÖZ 1 $f(x) = \sin x + \cos x$ in $[0, 2\pi]$ de grafiğini çiz.



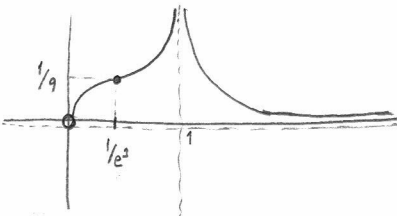
ÖZ 2 $f(x) = \frac{e^x}{x}$



ÖZ 3 $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

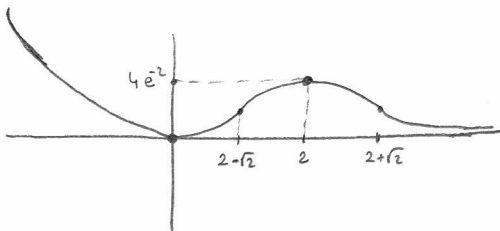


ÖZ 4 $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}$



$y=0$ yatay asimptot
 $x=1$ dikey "

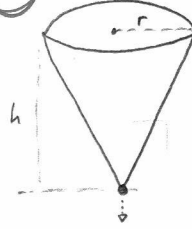
ÖZ 5 $f(x) = \frac{x^2}{e^x} = x^2 e^{-x}$



ÖZ: $f(x) = x^7 + x^5 + x + 1 = 0$ denkleminin sadece bir reel çözümü olduğunu gösteriniz

⊛ Ara değer teoremi ve Rolle Teoremi

ÖZ 2 Şekildeki depo başlangıçta su ile doludur.



$r = 5$ m ve $h = 10$ m dir.

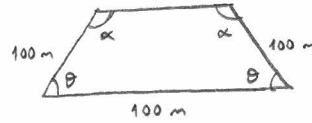
Suyun yüksekliği l olduğunda, depodan l^2 m³/sn oranında su sızmaktadır.

(a) Su yüksekliği 8 m olduğunda su yüksekliğindeki değişim hızını bulunuz.

(b) Su yüksekliğinin 6 m nin altına düşmemesi için, depoya sabit hızla su eklenecektir. Bu hız en az ne olabilir

⊛ Hacim $V(t) = \frac{1}{3} \pi r^2(t) l(t)$

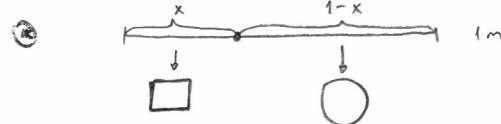
ÖZ: Şekildeki dörtgenin alanını maksimum yapan θ açısını bulunuz.



ÖZ: 1 m uzunluğundaki bir tel iki parçaya bölünüyor.

Bir parçasından çember, kalan parçasından kare yapılıyor.

Çember ve karenin alanları toplamını maksimum ve minimum yapmak için tel nereden bölünmelidir.



ÖZ: $f(x)$ $[0, 1]$ de sürekli olmak üzere,

(i) $f(0) = 0$

(ii) $2 < f'(x)$ eğer $(0, 1/2)$ ise

(iii) $-2 < f'(x) < 0$ eğer $(1/2, 1)$ ise

olarak veriliyor.

(a) $f(1/2) > 1$ olduğunu göster

(b) $f(1) > 1$ olduğunu göster