20

6. $y = xe^{-x}$ fonksiyonunun tanım kümesini, artan azalan olduğu aralıkları, asimptotlarını, maksimum/minimum noktalarını ve bükeyliğini inceleyerek grafiğini çiziniz (birinci ve ikinci türev bilgilerini kullanınız).

1. Adım: Tanım Kümesi: $\mathbb{R}$, Kesenler $x=0 \Rightarrow y=0$, $(0,0)$

2. Adım: K.N: $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)\,e^{-x} = 0$, KN: $x=1$

3. Adım: Büküm Noktaları: $f''(x) = -e^{-x} + (-e^{-x}).(1-x) = e^{-x}(x-2) = 0$

4. Adım Asimptotlar → D.A yok (TK: $\mathbb{R}$)

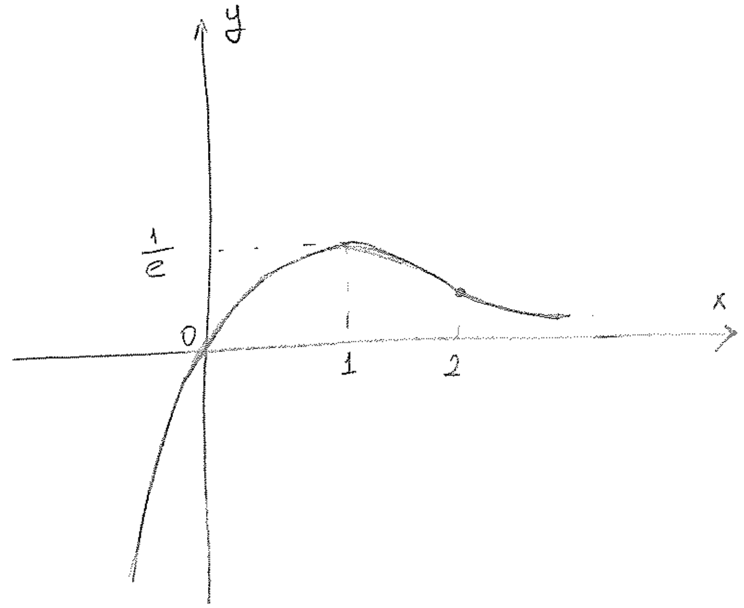
→ YA $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} \to \frac{x}{e^x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L.H} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$y=0$ yatay asimptot

$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$

5. Adım: Tablo

		1		2	
f'	+	0	−		−
f''	−		−	0	+
f		max $x=1, y=1/e$		büküm noktası	

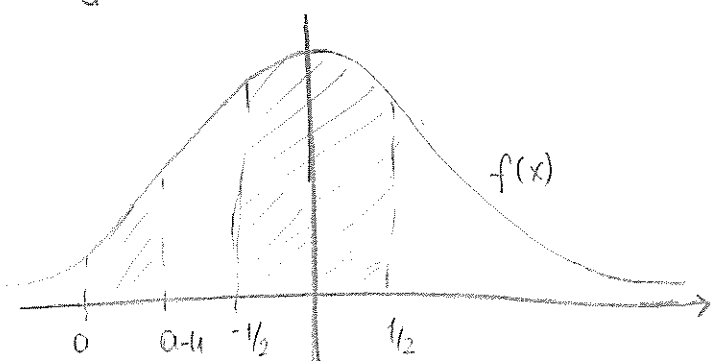


10

BONUS $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}$ eğrisini ele alınız. Bu eğrinin $x-$ekseni ile arasında kalan alanın en büyük olduğu bir birimlik aralığı türev ve integral kullanarak bulunuz.

$\int_a^{a+1}\left(\frac{e^{-x^2}}{1+x^2} - 0\right).dx = A \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow A' = \frac{d}{dx}\int_a^{a+1}\frac{e^{-x^2}}{1+x^2}.dx \overset{K.T.T}{\Rightarrow} A' = \frac{e^{-a^2-2a-1}}{2+a^2+2a} = \frac{e^{-a^2}}{1+a^2}$

$\Rightarrow e^{-2a-1} = \frac{2+a^2+2a}{1+a^2}$



TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2016-2017 GÜZ DÖNEMİ
MAT 101, MATEMATİK I, FİNAL SINAVI
23 ARALIK 2016

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (16 p.)	**2.** (24 p.)	**3.** (10 p.)	**4.** (15 p.)	**5.** (15 p.)	**6.** (20 p.)	Bonus (10 p.)	**TOPLAM**

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. Aşağıdaki limitleri (varsa) bulunuz. (2)

8

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}\left(\frac{2^{x+1}}{3^{x+1}}+1\right)}{3^x\left(\frac{2^x}{3^x}+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x.\frac{2}{3}+1\right)}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right)}$ (2)

(2) $\left(\lim_{x\to\infty} a^x = 0,\ 0<a<1 \text{ için}\right) \Rightarrow 0<\frac{2}{3}<1 \to \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{3.(1)}{1} = 3$ // (2)

8

(b) $\lim_{x\to 2}\frac{5}{x-2}\int_4^{x^2} e^{-t^2}\,dt = I$, $x=2$ için → $x-2 \to 0$; $\int_4^4 e^{-t^2}.dt \to 0$ → $I \to \frac{0}{0}$

(KTT)

L'Hopital $\Rightarrow I = 5\lim_{x\to 2}\frac{\frac{d}{dx}\int_4^{x^2} e^{-t^2}.dt}{\frac{d}{dx}(x-2)} =$ → Kalkülüsün temel theoremi $= e^{-x^4}.2x - 0$

$= 5\lim_{x\to 2}\frac{e^{-x^4}.2x}{1} = 5.2.e^{-16} = 10.e^{-16}$.

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

8 (a) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x + \sin x - 6} = I$ $\left\{ \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x\, dx \end{array} \right\}$ değişken değiştirme

$I = \int \frac{du}{u^2+u-6} = \int \frac{A.du}{u-2} + \int \frac{B\,du}{u+3}$ $\left[\frac{1}{u^2+u-6} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+3} \right]$

$-2 \quad +3$

$1 = A(u+3) + B(u-2)$

$\boxed{1.\text{Yol}}$ $\boxed{2.\text{Yol}}$

$2/ \; A + B = 0$ $\quad u = 2$ için $A = \frac{1}{5}$

$3A - 2B = 1$ $\quad u = -3$ için $B = -1/5$

$5A = 1$

$A = 1/5$

$B - 1/5$

$I = \frac{1}{5} \int \frac{1}{u-2}.du - \frac{1}{5} \int \frac{1}{u+3}.du$

$= \frac{1}{5} \ln|u-2| - \frac{1}{5} \ln|u+3| + c$

$= \frac{1}{5} \ln|\sin x - 2| - \frac{1}{5} \ln|\sin x + 3| + c = \frac{1}{5} \ln\left|\frac{\sin x - 2}{\sin x + 3}\right| + c$

8 (b) $\int \frac{4\, dx}{(4-x^2)^{3/2}} = I$

$x = 2\sin\theta$

$dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$I = \int \frac{4.2.\cos\theta\, d\theta}{8\cos^3\theta}$

2, x, θ

$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$

$\sqrt{(4-x^2)^3} = 8\cos\theta$

$= \int \sec^2\theta.d\theta$

$= \tan\theta + c$

$= \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + c$

8 (c) $\int (x+5)e^x\, dx = I$ $\left\{ \begin{array}{ll} u = x+5 & dv = e^x.dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right\}$ $\left\{ I = u\,v - \int v.du \right\}$

$I = (x+5).e^x - \int e^x.dx = (x+5)e^x - e^x + c$

$= (x+4)e^x + c$

10

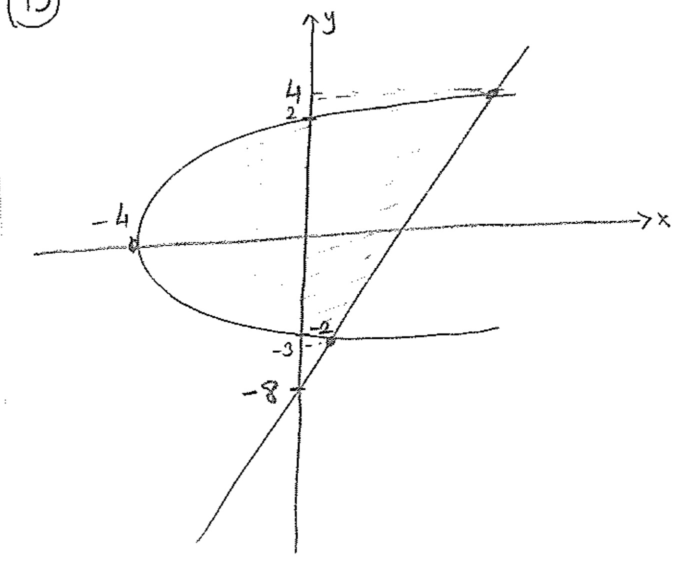
3. $\int_{101}^{\infty} \frac{x^{100}\, dx}{x^{102} + e^{-3x}}$ integralinin yakınsaklığını/ıraksaklığını belirleyiniz.

$\rightarrow x > 101$ için $e^{-3x} > 0$, $x^{102} + e^{-3x} > x^{102} \Rightarrow \frac{x^{100}}{x^{102} + e^{-3x}} < \frac{x^{100}}{x^{102}} = \frac{1}{x^2}$

$\rightarrow \int_{101}^{\infty} \frac{1}{x^2}.dx$ < p testi, yakınsak, $p>1$

$\lim_{R\to\infty} \int_{101}^{R} \frac{1}{x^2}.dx = \lim_{R\to\infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_{101}^{R} = -\frac{1}{R} + \frac{1}{101} \rightarrow$ yakınsak, Dolayısıyla doğrudan karşılaştırma testinden (thm) yakınsak

15 4. $x = y^2 - 4$ ile $y = x - 8$ eğrileri arasında kalan kapalı bölgeyi çiziniz ve bu bölgenin alanını hesaplayınız.



Kesişim noktaları

$y^2 - 4 = y + 8 \Rightarrow y^2 - y - 12 = 0$

$(y-4)(y+3) = 0, \; y = 4, \; y = -3$

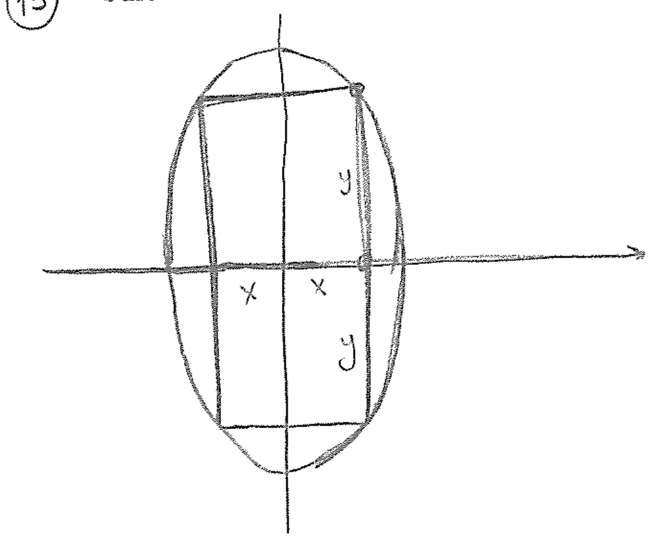
Alan

$\int_{-3}^{4} (y + 8 - y^2 + 4)\, dy = \left. \frac{1}{2}y^2 + 8y - \frac{y^3}{3} + 4y \right|_{-3}^{4}$

$= \frac{343}{6}$

5. $9x^2 + y^2 = 144$ elipsinin içerisine çizilebilecek maksimum alana sahip dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulunuz.

15



$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{144} = 1$

$a = 4 \quad b = 12$

Alan $= 4x\,y = 4x\sqrt{144 - 9x^2} = f(x)$

Kritik Noktalar

$f'(x) = 4\sqrt{144 - 9x^2} + 4x.\frac{-18x}{2\sqrt{144 - 9x^2}} = 0$

$\Rightarrow 144 - 9x^2 - 9x^2 = 0$

$18x^2 = 144$

$x = 2\sqrt{2}$, $y = 6\sqrt{2}$

Uç noktalar: $f(0) = 0$, $f(4) = 0$ → Dolayısıyla maksimum alana sahip dikdörtgenin kenar uzunlukl