



TOBB
EKONOMİ VE TEKNOLOJİ
ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2016-2017 GÜZ DÖNEMİ
MAT 101, MATEMATİK I, ARASINAV
5 KASIM 2016

Adı Soyadı:

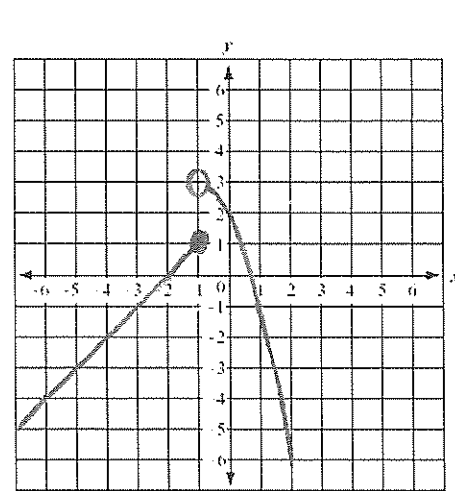
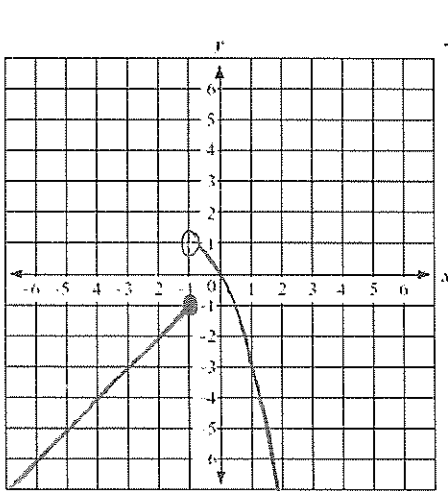
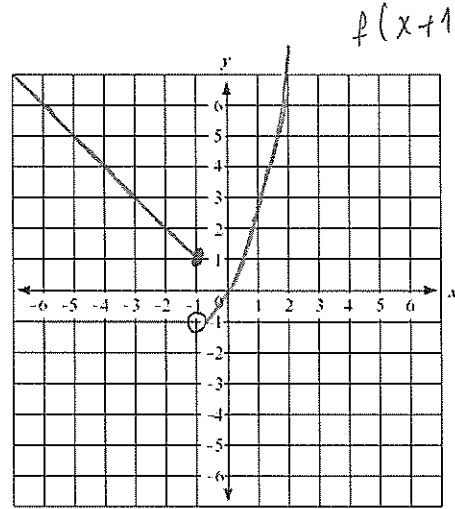
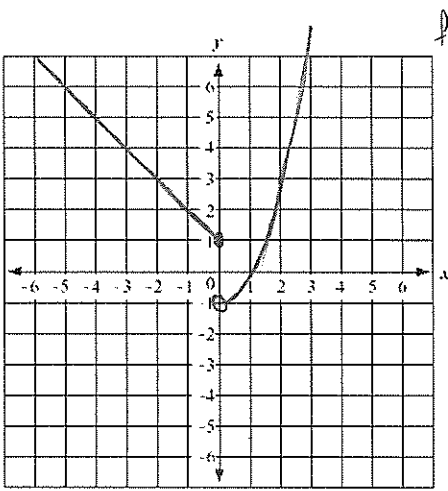
No:

İMZA:

1. (15 p.)	2. (15 p.)	3. (20 p.)	4. (20 p.)	5. (15 p.)	6. (15 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir.
Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \text{ ise;} \\ x^2-1, & x > 0 \text{ ise.} \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini kullanarak $g(x) = -f(x+1) + 2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



2. $\ln(1,03)$ değerini lineer yaklaşım veya diferansiyel ile yaklaşık olarak hesaplayınız.

$f(x) = \ln x$ için i) lineer yaklaşım: $a=1$ noktasında $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$
 $= \ln 1 + \frac{1}{1}(x-1)$
 $= x-1$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow L(1,03) = 1,03 - 1 = 0,03$

ii) diferansiyel: $f(a+h) \approx f(a) + h f'(a)$, $a=1$ ve $h=0,03$ için
 $\ln(1,03) \approx \ln(1) + 0,03 \cdot \frac{1}{1} = 0,03$

3. (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & x < 4 \text{ ise;} \\ x^2+ax+b, & x \geq 4 \text{ ise.} \end{cases}$ fonksiyonunun her yerde türevlenebilir olması için a ve b hangi değerleri almalıdır?

f nin parçaları $x=4$ nok. dışında her yerde sürekli ve türevli olduğundan f de $x=4$ nok. dışında her yerde sürekli ve türevlidir.

$x=4$ te süreklilik: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2+ax+b = 4^2+4a+b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = 8 = 16+4a+b$$

$$\Rightarrow \boxed{4a+b+8=0}$$

$x=4$ te türev: i) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\frac{x^2-16}{x-4} - (16+4a+b)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+4-(8)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} 1 = 1$

ii) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2+ax+b-16-4a-b}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2-16+a(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(x+4+a)}{x-4} = 8+a$

$$\Rightarrow 1 = 8+a \Rightarrow \boxed{a = -7}$$

$$4 \cdot (-7) + b + 8 = 0 \Rightarrow -28 + b + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 20}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}} - \frac{1}{4}}{x} = ?$ (L'Hopital kuralını kullanmayınız!)

1. yol: $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}} - \frac{1}{4}}{x \left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}} + \frac{1}{4} \right)}$

$$\frac{4 - (x+1)^2 - 3}{4[(x+1)^2+3]}$$

$4 - (x+1)^2 - 3 = 4 - x^2 - 2x - 1 - 3 = -x^2 - 2x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 - 2x}{x \left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}} + \frac{1}{4} \right)}$$

$-x^2 - 2x = x(-x-2)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x-2}{\left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}} + \frac{1}{4} \right) 4[(x+1)^2+3]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x-2}{\left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}} + \frac{1}{4} \right) 4[(x+1)^2+3]}$$

$$= \frac{-2}{16}$$

$$= -1/8$$

2. yol: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}}$

nin $a=0$ nok. türevlidir.

$$f(x) = [(x+1)^2+3]^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} [(x+1)^2+3]^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot (x+1)$$

$$= -[(x+1)^2+3]^{-\frac{3}{2}} (x+1)$$

$$f'(0) = -[1+3]^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -(4)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -(2^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -2^{-3}$$

$$= -\frac{1}{8}$$

4. (a) $y = e^3 + 2^{2x} + x^{\sin x}$ ise $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = ?$

$$f(x) = x^{\sin x} \Rightarrow \ln f(x) = \sin x \ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) = (x^{\sin x})'$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2^{2x} \cdot \ln 2 \cdot 2 + (x^{\sin x})' = 2^{2x} 2 \ln 2 + x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{\pi}{2}} 2 \ln 2 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\sin \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= 2^{\pi} 2 \ln 2 + \frac{\pi}{2} \left(0 + \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= 2^{\pi} 2 \ln 2 + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$= 2^{\pi} 2 \ln 2 + 1 \quad (= 2^{\pi} \ln 4 + 1)$$

$$(= 2^{\pi+1} \ln 2 + 1)$$

(b) $(x^2 + y^2)^4 = 10xy^2 + 1$ denkleminde verilen eğrinin $(0, 1)$ noktasındaki teğetin eğimi kaçır?

$$4(x^2 + y^2)^3 (2x + 2yy') = 10(y^2 + 2xyy')$$

$$4(0^2 + 1^2)^3 (2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot y'(0)) = 10(1^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot y'(0))$$

$$4 \cdot 2 y'(0) = 10$$

$$y'(0) = \frac{10}{8}$$

$$y'(0) = \frac{5}{4}$$

Buradaki tüm bilgiler grafikte de bulunabilir.

