TOBB
EKONOMİ VE TEKNOLOJİ
ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, BAHAR DÖNEMİ 2007-2008
MAT 102, MATEMATİK II, 1. ARA SINAVI
17 ŞUBAT 2008

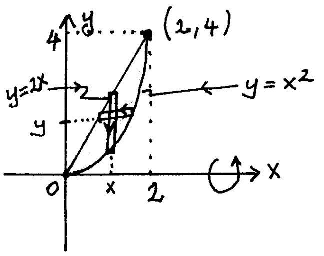
İMZA

Adı Soyadı :
Numarası :

1.	2.	3.		4.		5.			TOPLAM

NOT: Sınav süresi 100 dakikadır.
Başarılar.

1. *(15 puan)* $y = 2x$ doğrusu ile $y = x^2$ eğrisi arasında kalan bölgeyi çiziniz ve bu bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



Dilimleme yöntemi kullanılırsa:

$$V = \pi \int_{x=0}^{2} \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right] dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4)\, dx$$

$$= \pi \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right)\Big|_0^2 = \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{64\pi}{15}\ br^2$$

Silindirik kabuk yöntemi kullanılırsa: $\left(\begin{array}{l} y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \\ y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \end{array} \right)$

$$V = \int_{y=0}^{4} 2\pi y \left[\sqrt{y} - \frac{y}{2} \right] dy$$

$$= 2\pi \int_0^4 \left(y^{3/2} - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = 2\pi \left[\frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{1}{6} y^3 \right]_0^4 = 2\pi \left(\frac{64}{5} - \frac{64}{6} \right)$$

$$= \frac{64\pi}{15}\ br^2$$

2. *(15 puan)* Parametrik denklemleri $x(t) = e^t + e^{-t}$, $y(t) = 3 - 2t$ olan eğrinin, $t = 0$ dan $t = 3$'e kadar olan parçasının uzunluğunu bulunuz.

$\frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}$ ve $\frac{dy}{dt} = -2$ türevlerini aşağıdaki formülde yerine yazarsak:

$$L = \int_{t=0}^{3} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^3 \sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + (-2)^2}\, dt$$

$$= \int_0^3 \sqrt{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t} + 4}\, dt \overset{e^t e^{-t} = 1}{=\!=\!=} \int_0^3 \sqrt{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}\, dt$$

$$\overset{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}{=\!=\!=} \int_0^3 \sqrt{[e^t + e^{-t}]^2}\, dt = \int_0^3 [e^t + e^{-t}]\, dt = e^t - e^{-t} \Big|_0^3$$

$$= [e^3 - e^{-3}] - \underbrace{[e^0 - e^{-0}]}_{=0} = \frac{e^6 - 1}{e^3}\ br.$$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a. *(15 puan)* $\displaystyle\int \frac{1+x^2+x^3}{\underbrace{x^2(1+x)}_{x^2+x^3}}dx \;=\; \int\left(\frac{1}{x^2(1+x)}+1\right)dx$

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x} \quad\Rightarrow\quad 1 = Ax(1+x) + B(1+x) + Cx^2$$

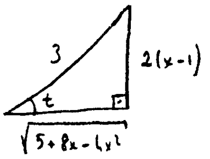
$$x=-1 \;\Rightarrow\; \boxed{C=1}$$
$$x=0 \;\Rightarrow\; \boxed{B=1}$$
$$x=1 \;\Rightarrow\; 1 = 2A+2B+C \;\Rightarrow\; \boxed{A=-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1+x^2+x^3}{x^2(1+x)} = \int 1\cdot dx + \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{1+x}dx$$

$$= \boxed{x - \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|1+x| + C} = \boxed{x - \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{1+x}{x}\right| + C}$$

b. *(15 puan)* $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}}$

- $5+8x-4x^2 = 9-4(x-1)^2 = 3^2 - (2(x-1))^2$



- $\boxed{x-1 = \frac{3}{2}\sin t} \Rightarrow x = \frac{3}{2}\sin t + 1$ ve $t = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2(x-1)}{3}\right)$

  $dx = \frac{3}{2}\cos t\,dt$

$$\Rightarrow \int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}} = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\sin t+1\right)\cdot\frac{3}{2}\cos t\,dt}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\sin t+1\right)\frac{3}{2}\cos t\,dt}{3\cdot\cos t}$$

$$= \int\left(\frac{3}{4}\sin t + \frac{1}{2}\right)dt = \frac{-3}{4}\cos t + \frac{1}{2}t + C$$

$$= \frac{-\cancel{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{5+8x-4x^2}}{\cancel{3}} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2(x-1)}{3}\right) + C$$

$$= \boxed{\frac{-\sqrt{5+8x-4x^2}}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2(x-1)}{3}\right) + C}$$

4. Aşağıdaki genelleştirilmiş (has olmayan) integrallerin yakınsak veya ıraksaklığını belirleyiniz.

a. *(10 puan)* $\displaystyle\int_{102}^{\infty} \frac{x}{2x^3 + 5xe^x + 2\ln(x^2)}dx$

$x \geq 102$ için $5xe^x > 0$ ve $2\ln(x^2) > 0$ olduğundan $\dfrac{1}{2x^2} \geq \dfrac{x}{2x^3 + 5xe^x + 2\ln(x^2)}$

$$\int_{102}^{\infty} \frac{1}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_{102}^{b}\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\left.\frac{-1}{x}\right]_{102}^{b}\right) = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{b}+\frac{1}{102}\right) = \frac{1}{204}$$

veya $\displaystyle\int_{102}^{\infty}\frac{1}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{102}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx \xrightarrow[p=2>1]{\text{p-testi}}$ yakınsak $\Rightarrow$ Karşılaştırma Testinden

$$\boxed{\int_{102}^{\infty}\frac{x}{2x^3+5xe^x+2\ln(x^2)}dx \text{ yakınsak olur.}}$$

b. *(10 puan)* $\displaystyle\int_0^e x\ln x\,dx$

$$= \lim_{a\to 0^+}\underbrace{\int_a^e x\ln x\,dx}_{} = \lim_{a\to 0^+}\left(\left.\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_a^e - \int_a^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$\left(\begin{array}{l} u = \ln x\ ,\ dv = x\,dx \\ \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx\ ,\ v = \frac{x^2}{2}\end{array}\right)$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left(\left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_a^e\right)$$

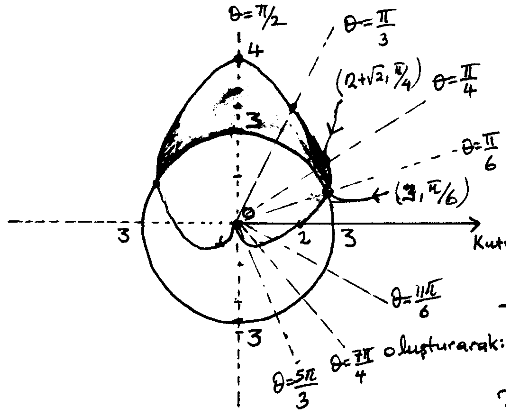
$$= \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{2}e^2\cdot 1 - \frac{1}{4}e^2 - \left(\underbrace{\frac{1}{2}a^2\ln a}_{0} - \underbrace{\frac{1}{4}a^2}_{0}\right)\right)$$

$$= \frac{e^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^e x\ln x\,dx \text{ yakınsaktır}}$$

__NOT__: $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \underbrace{a^2\ln a}_{(0\cdot\infty)} = \lim_{a\to 0^+}\underbrace{\frac{\ln a}{1/a^2}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{a\to 0^+}\frac{1/a}{-2/a^3} = 0$

5. **a.** *(8 puan)* $x^2 + y^2 = 9$ çemberinin ve $r = 2(1+\sin\theta)$ kardiyoidinin grafiğini çiziniz.



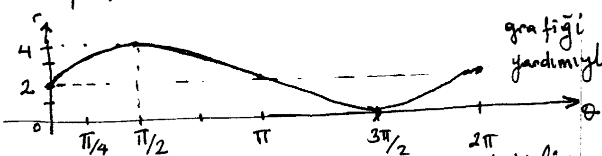
$-\ r^2 = x^2 + y^2$ olduğundan

$x^2+y^2 = 9 \implies r = 3$ çemberini verir.

$-$ öte taraftan ise, aşağıdaki değer tablosunu oluşturarak:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	...
r	2	3	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$	4	...

veya



grafiği yardımıyla

yukarıdaki $r = 2(1+\sin\theta)$ grafiği çizilebilir.

b. *(4 puan)* Kesişim noktalarını bulunuz.

$r = 3$ ve $r = 2(1+\sin\theta)$ eğrilerini birbirine eşitlersek:

$$2(1+\sin\theta) = 3 \implies 1+\sin\theta = \frac{3}{2} \implies \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ve } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

c. *(8 puan)* Çemberin dışında ve kardiyoidin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

$$\text{Taralı alan} = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{5\pi/6} \left[\frac{1}{2}(r_{dış})^2 - \frac{1}{2}(r_{iç})^2\right] \underset{\substack{\theta=\frac{\pi}{2}\text{'ye} \\ \text{simetrik}}}{\overset{\text{Bölge}}{=}} \cancel{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\cancel{2}}\left[(2(1+\sin\theta))^2 - (3)^2\right] d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[4 + 8\sin\theta + 4\sin^2\theta - 9\right] d\theta =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[-5 + 8\sin\theta + \overset{2}{\cancel{4}}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{\cancel{2}}\right)\right] d\theta$$

$$= -3\theta - 8\cos\theta - \sin 2\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$= \left(-\frac{3\pi}{2} - 0 - 0\right) - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{8\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi \ br^2$$