2. ARAJINAV ÇÖZÜMLERİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, BAHAR DÖNEMİ 2007-2008
MAT 102, MATEMATİK II 2. ARA SINAVI
16 Mart 2008

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

İMZA

Adı Soyadı :
Numarası :

1.	2.	3.		4.		5.			TOPLAM

NOT: Sınav süresi 100 dakikadır.
Başarılar.

1. *(20 puan)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)4^n}$ serisinin yakınsaklık aralığını (kümesini) ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Kök testi: $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|}{(n+1)^{1/n}4} = \frac{1}{4}|x+2|$ veya Oran testi: $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|^{n+1}}{(n+2)4^{n+1}} \frac{(n+1)4^n}{|x+2|^n} = \frac{1}{4}|x+2|$

$\rho = \frac{1}{4}|x+2| < 1$ ise kuvvet serisi mutlak yakınsaktır, $\rho > 1$ ise ıraksak.

$\rho < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 4 \Leftrightarrow -4 < x+2 < 4 \Leftrightarrow -6 < x < 2$

O halde kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R=4$ dür, kuvvet serisi $x \in (-6,2)$ için mutlak yakınsak ve $x<-6$ veya $x>2$ için ıraksaktır.

$x=-6$ için kuvvet serisi, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(n+1)4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ koşullu yakınsak alterne harmonik serisine dönüşür,

$x=2$ için kuvvet serisi, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak harmonik seriye dönüşür. Buna göre kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $I=[-6,2)$ dir.

2. *(15 puan)* $f(x) = \ln(3+x)$ fonksiyonunun $x = -2$ noktası civarındaki Taylor serisini bulunuz (yani, $f(x)$ fonksiyonunun $(x+2)$ nin bir kuvvet serisi gösterimini elde ediniz.)

I. YOL

$$\frac{1}{3+t} = \frac{1}{1+(t+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t+2)^n, \quad |t+2|<1 \qquad \left(\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ |x|<1 \right)$$

$$\int_{-2}^{x} \frac{1}{3+t}\,dt = \ln(3+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{-2}^{x} (t+2)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x+2)^{n+1}, \quad |x+2|<1$$

$$-1<x+2<1$$

$$-3<x<-1$$

$$\ln(3+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x+2)^n, \quad -3<x<-1$$

$x=-3$ için kuvvet serisi, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak harmonik serisi

$x=-1$ için kuvvet serisi, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (şartlı) yakınsak alterne harmonik serisi olur. Buna göre

$$\ln(3+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x+2)^n, \quad x \in (-3,-1]$$

2. YOL

Taylor seri açılımındaki katsayılar hesaplanarak aynı sonuç elde edilebilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(-2)}{k!} (x+2)^k.$$

3.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{eğer } (x,y) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } (x,y) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

a. *(5 puan)* f fonksiyonu, $(x,y) \neq (0,0)$ iken sürekli midir? Neden?

$(x,y) \neq (0,0)$ iken f rasyonel bir fonksiyon olduğundan süreklidir. Rasyonel bir fonksiyon tanım kümesindeki her noktada süreklidir.

b. *(10 puan)* f fonksiyonu, $(x,y) = (0,0)$ da sürekli midir? Neden?

$f(x,0) = 0 = f(0,y)$. Diğer taraftan $f(x, x^{1/3}) = \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$

Bir $P=(x,y)$ noktası, $O=(0,0)$ noktasına yeterince yakın olmasına rağmen x-ekseni veya y-ekseni üzerinde $f(P)=f(x,y)=0$ fakat P noktası $y=x^{1/3}$ eğrisi üzerinde ise $f(P)=f(x,y)=\frac{1}{2}$ olmaktadır. Buradan $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ olmadığı sonucu çıkar, f nin $O=(0,0)$ da limiti olmadığından bu noktada sürekli olamaz,

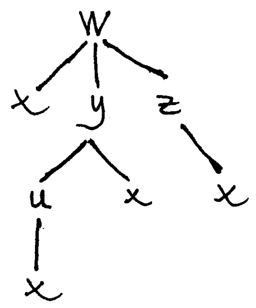
4. **a.** *(10 puan)* $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\sin y$ fonksiyonunun $(1,0)$ noktasındaki, $v = i + j$ vektörü yönündeki yönlü türevi bulunuz.

f düzlemin her noktasında sürekli $f_x = 2xy + ye^{xy}\sin y$ ve $f_y = x^2 + xe^{xy}\sin y + e^{xy}\cos y$ türevlerine sahiptir. $f_x(1,0) = 0$ ve $f_y(1,0) = 1+1 = 2$ dir, $D_{\vec{u}}f(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot\vec{u}$ formülü kullanılabilir.

$\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ ve $\nabla f(1,0) = 0\vec{i} + 2\vec{j} = (0,2)$ dir,

$D_{\vec{u}}f(1,0) = (0,2)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

b. *(10 puan)* $w = g(x,y,z) = x^2yz^3$; $y = \ln(u + \sin x)$, $u = e^{2x}$, $z = \cos x$ ise, zincir kuralı yardımıyla, $\dfrac{dw}{dx}$ türevinin $x = 0$ daki değerini hesaplayınız.



$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dw}{dx} = 2xyz^3 + x^2z^3\cdot\frac{2e^{2x}}{u+\sin x} + x^2z^3\frac{\cos x}{u+\sin x} + 3x^2yz^2(-\sin x)$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0+0+0+0 = 0$$

5. *(20 puan)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5^n}+\frac{e}{(n+1)(n+2)}\right)$ serisinin yakınsak veya ıraksaklığını belirleyiniz. Seri yakınsak ise toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{5^n}+\frac{e}{(n+1)(n+2)}\right]=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n+e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Eşitliğin sağındaki serilerin her ikisi de yakınsak olduğundan verilen seri de yakınsaktır.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{1}{4}$$

$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=a_n$ olduğundan

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)$$

ve $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{5^n}+\frac{e}{(n+1)(n+2)}\right]=4\cdot\frac{1}{4}+e\cdot\frac{1}{2}=1+\frac{e}{2}$$

6. *(10 puan)* Genel terimi $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ olan dizinin limitini bulunuz.

I. YOL

$$0<a_n=\frac{\cancel{(n!)}(n!)}{\cancel{(n!)}(n+1)(n+2)\cdots(2n)}=\frac{1}{n+1}\cdot\underbrace{\frac{2}{n+2}\cdots\frac{n}{2n}}_{<1}<\frac{1}{n+1},\ n=1,2,3,\dots$$

$\lim_{n\to\infty}0=0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$. Sıkıştırma Teoreminden $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ bulunur.

II. YOL

$\sum a_n$ serisi düşünülürse, oran testinden $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}=\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{4}<1$ olur. Bu durumda $\sum a_n$ yakınsak olacağından

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=0$ bulunur.