FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, BAHAR DÖNEMİ 2007-2008
MAT 102, MATEMATİK II, FİNAL SINAVI
08 NİSAN 2008

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

Adı Soyadı :

Numarası :

İMZA:

1.	2.		3.		4			5.		TOPLAM

Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir.
Sınav süresi 100 dakikadır.
Başarılar.

1. *(20 puan)* $h(x,y) = x^2 + xy + y^2$ fonksiyonun $x^2 + y^2 \leq 1$ diski üzerindeki en büyük (maksimum) ve en küçük (minimum) değerlerini bulunuz.

h, kapalı ve sınırlı bir bölge üzerinde tanımlı ve sürekli olduğundan, mini-max teoreminden, h-nın $x^2+y^2 \leq 1$ üzerinde mutlak (en büyük, en küçük) değerleri vardır. Bu değerler bölgenin iç noktalarında alınabildiği gibi, sınır noktalarında da alınabilir.

$$\nabla h(x,y) = (2x+y,\, x+2y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \iff (x,y)=(0,0) \text{ ve } h(0,0)=0^2+0.0+0^2=0$$

iç nokta

I. YOL: Bölgenin sınır noktaları Lagrange çarpanları yöntemiyle incelenebilir.

$$\left.\begin{array}{l} h(x,y)=x^2+xy+y^2 \\ g(x,y)=x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h_x=\lambda g_x \\ h_y=\lambda g_y \\ g(x,y)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} 2x+y=\lambda.2x & \ldots (1) \\ 2y+x=\lambda.2y & \ldots (2) \\ x^2+y^2=1 & \ldots (3) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow y=2x(\lambda-1) \\ (2) \Rightarrow x=2y(\lambda-1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1=x^2+y^2=4y^2(\lambda-1)^2+4x^2(\lambda-1)^2$$

$$= 4(\lambda-1)^2\underbrace{(y^2+x^2)}_{1} \Rightarrow (\lambda-1)^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \lambda-1=\mp\frac{1}{2}$$

(*) $\lambda-1=\frac{1}{2} \Rightarrow \underset{(1)}{y=x}$, $\lambda-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow \underset{(1)}{y=-x}$

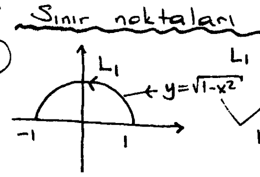
$g(x,y)=x^2+y^2=1$ olduğundan $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}\right),\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$ bulunur.

$$\Rightarrow h\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=h\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}\right)=\frac{3}{2} \text{ ve } h\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=h\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}\right)=\frac{1}{2}$$

olduğundan fonksiyonun $\boxed{\text{maksimum (en büyük) değeri } 3/2}$, minimum (en küçük) değeri 0 olarak bulunur.

II. YOL: Sınır noktaları için bir başka çözüm ise:

(i)

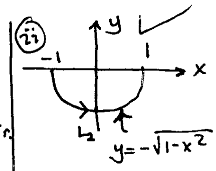


L_1 boyunca, $y=\sqrt{1-x^2}$ olup:

$f(x) = \underbrace{x^2+y^2}_{=1} + x\sqrt{1-x^2}$; $[-1,1]$

kullanılarak maks/min hesaplanabilir.

(ii)



L_2 boyunca, $f(x) = 1 - x\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ alınarak benzer şekilde maks/min hesaplanır.

I. YOL: Bölgenin sınır noktaları Lagrange çarpanları yöntemiyle incelenebilir.

$$\left.\begin{array}{l} h(x,y)=x^2+xy+y^2 \\ g(x,y)=x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h_x=\lambda g_x \\ h_y=\lambda g_y \\ g(x,y)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} 2x+y=\lambda .2x & \dots (1) \\ 2y+x=\lambda .2y & \dots (2) \\ x^2+y^2=1 & \dots (3) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow y=2x(\lambda-1) \\ (2) \Rightarrow x=2y(\lambda-1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1=x^2+y^2=4y^2(\lambda-1)^2+4x^2(\lambda-1)^2 = 4(\lambda-1)^2\underbrace{(y^2+x^2)}_{1} \Rightarrow (\lambda-1)^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \lambda-1=\mp\frac{1}{2}$$

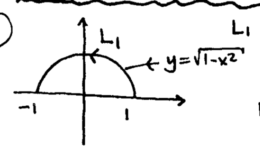
$$(*)\quad \lambda-1=\frac{1}{2} \Rightarrow y\underset{(1)}{=}x \quad , \quad \lambda-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow y\underset{(1)}{=}-x$$

$g(x,y)=x^2+y^2=1$ olduğundan $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}\right),\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$ bulunur.

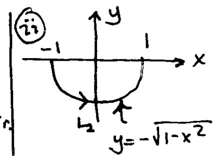
$$\Rightarrow h\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=h\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}\right)=\frac{3}{2} \quad \text{ve} \quad h\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=h\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}\right)=\frac{1}{2}$$

olduğundan fonksiyonun maksimum (en büyük) değeri 3/2, minimum (en küçük) değeri 0 olarak bulunur.

II. YOL: Sınır noktaları için bir başka çözüm ise:

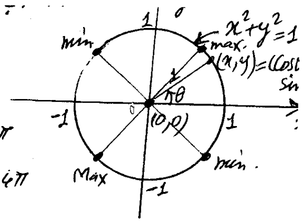
(i) 

L_1 boyunca, $y=\sqrt{1-x^2}$ olup: $f(x)=\underbrace{x^2+y^2}_{=1}+x\sqrt{1-x^2}$; $[-1,1]$ kullanılarak maks/min hesaplanabilir.

(ii) 

L_2 boyunca, $f(x)=1-x\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ alınarak benzer şekilde maks/min hesaplana

III. YOL: Bölgenin sınırı üzerinde: $r=1$, $0\le\theta\le 2\pi$



$$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta \Rightarrow h(x,y)=h(r,\theta)=\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$$
$$=1+\tfrac{1}{2}\sin 2\theta \quad ; 0\le\theta\le 2\pi$$
$$=g(\theta) \qquad 0\le 2\theta\le 4\pi$$

$\theta=0 \Rightarrow g(0)=1+\frac{1}{2}\sin 0=1,$

$\theta=2\pi \Rightarrow g(2\pi)=1+\frac{1}{2}\sin 4\pi=1$

$g'(\theta)=\cos 2\theta=0 \Rightarrow 2\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2} \Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{4},\ \theta_2=\frac{3\pi}{4},\ \theta_3=\frac{5\pi}{4},\ \theta_4=\frac{7\pi}{4}$

$g''(\theta)=-2\sin 2\theta \Rightarrow g''(\pi/4)=g''(5\pi/4)=-2<0,\ g''(\frac{3\pi}{4})=g''(7\pi/4)=2>0$

$g(\theta_1)=1+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}=3/2=g(\theta_3)$

$g(\theta_2)=1+\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=g(\theta_4)$

Buna göre, h nin $\boxed{\text{en büyük değeri }=3/2}$ olup, $\left.\begin{array}{l}\theta_1\leftrightarrow\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)\\ \theta_3\leftrightarrow\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)\end{array}\right\}$ sınır noktalarında alınır;

h nin $\boxed{\text{en küçük değeri }=0}$ olup, $(0,0)$ iç noktasında alınır.

2\. a. *(10 puan)* $z = f(x,y) = e^{xy}\sin(x^2+y^2)$ yüzeyine $\left(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ noktasında teğet olan düzlemin denklemini bulunuz.

$$f_x(x,y) = e^{xy}\left[y\sin(x^2+y^2) + 2x\cos(x^2+y^2)\right] \Rightarrow f_x\left(0,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = e^0\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\frac{\pi}{4} + 2\cdot 0\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

$$f_y(x,y) = e^{xy}\left[x\sin(x^2+y^2) + 2y\cos(x^2+y^2)\right] \Rightarrow f_y\left(0,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = e^0\left[0\cdot\sin\frac{\pi}{4} + 2\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$z = f\left(0,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + f_x\left(0,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)(x-0) + f_y\left(0,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(y-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}x + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(y-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \quad \text{teğet düzlemin denklemi!} \\ = L(x,y)}$$

b. *(10 puan)* $f\left(-0.1, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

I. YOL (Doğrusal yaklaşım)

$$f\left(-0.1,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \approx L\left(-0.1,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(-0.1) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\underbrace{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)}_{0}$$

10

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{40}}$$

II. YOL (Diferansiyel yardımıyla)

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy \Rightarrow dz = \underbrace{\frac{\sqrt{2\pi}}{4}}_{f_x\left(0,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)} \cdot \underbrace{(-0.1)}_{dx} + \underbrace{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}}_{f_y\left(0,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)} \cdot \underbrace{(0)}_{dy}$$

10

$$\Rightarrow f\left(-0.1,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \approx f\left(0,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + dz = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2\pi}}{40}}$$

3\. a. *(12 puan)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirleyiniz.

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ alterne serisinde $a_n = \frac{1}{n\ln n} > 0$;

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{(\ln x+1)}{(x\ln x)^2} < 0 \quad ;\left[x \geq 2 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow \ln x + 1 > 0\right]$$

$\Rightarrow f(x)$ ve (a_n) azalandır. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n} = 0$ olduğundan,

AST $\Rightarrow$ <u>seri yakınsaktır.</u>

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \int_2^{\infty}\frac{dx/x}{\ln x} = \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u} = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{b}\frac{du}{u} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln u\right]_{\ln 2}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln(\ln 2)) = \infty$$

Bu integral ıraksak olduğundan, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ mutlak değer serisi ıraksak;

yani verilen seri **koşullu yakınsaktır. (şartlı)**

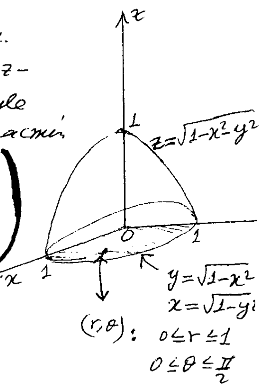
b. *(8 puan)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n(n+1)}$ serisinin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirleyiniz.

$$a_n = \frac{3n^2+1}{n(n+1)} = \frac{3n^2+1}{n^2+n} = \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 3 \quad (n\to\infty \text{ iken})$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3 \neq 0$ olduğundan, genel terim (ıraksaklık) testiyle, verilen seri ($+\infty$'a) ıraksar.

4. $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ fonksiyonunun grafiğinin altında ve xy-düzleminin üstünde kalan bölgenin hacmini:

a. *(5 puan)* iki katlı integral kullanarak $dxdy$ nin integrali olarak ifade ediniz.



$z=f(x,y)=f(\pm x,\pm y)$ olduğundan, fonksiyonun grafiği xz- ve yz-düzlemlerine göre simetriktir; yani f, dört bölgede xy-düzlemiyle aynı hacmi çevreler. O halde sorulan hacim, 1. bölgedeki hacmin dört katıdır:

Yoksa (−2)

$$V = 4\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \left(= \int_{y=-1}^{1}\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy \right)$$

b. *(5 puan)* iki katlı integral kullanarak $dydx$'in integrali olarak ifade ediniz.

$$V = 4\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dydx$$

$$\left(= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx \right)$$

c. *(10 puan)* kutupsal koordinatlar yardımıyla hesaplayınız.

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta\\ y&=r\sin\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow V = 4\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sqrt{1-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\cdot r\,d\theta\,dr$$

Yoksa (−2)

$$= 4\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sqrt{1-r^2}\,r\,d\theta\,dr$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta \cdot \int_{r=0}^{1} \sqrt{1-r^2}\,r\,dr$$

$$= 4\cdot\Big[\theta\Big]_0^{\pi/2}\cdot\Big[-\tfrac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big]_0^1$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\Big[0+\tfrac{1}{3}(1-0)^{3/2}\Big] = 2\pi\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}\ \text{birim}^3$$

7

5. a. *(10 puan)* $\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dy dx$ integralini hesaplayınız.

$u = x^2+y^2+1 \Rightarrow du = 2y\,dy \Rightarrow y\,dy = du/2$

$\int \frac{xy\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \frac{x}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{x}{2} \cdot 2\sqrt{u} = x\sqrt{u} = x\sqrt{x^2+y^2+1}$

$\int_{y=0}^{1} \frac{xy\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \left[x\sqrt{x^2+y^2+1}\right]_{y=0}^{1} = x\left[\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}\right]$

$\Rightarrow \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dy dx = \int_{x=0}^{1} x\left[\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}\right] dx$

$= \frac{1}{3}\left[(x^2+2)^{3/2} - (x^2+1)^{3/2}\right]_0^1$

$= \boxed{\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}}$

b. *(10 puan)* $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\ln^2(x)} dx$ integralinin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirleyiniz.

$x \geq 1$ için $\ln^2 x \geq 0 \Rightarrow x^2 + \ln^2 x \geq x^2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2+\ln^2 x} \leq \frac{1}{x^2}$

ve $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ (has olmayan) integrali ($p = 2 > 1$ integrali) yakınsak

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^2+\ln^2 x} dx$ integrali de yakınsaktır. (Basit karşılaştırma testi)