TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, YAZ DÖNEMİ 2008-2009
MAT 102, MATEMATİK II, 1. ARA SINAVI
6 HAZİRAN 2009

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (20 p.)	2. (25 p.)	3. (10 p.)	4. (25 p.)	5. (20 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. *(20 puan)* Aşağıdaki kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n(x+1)^n}{2^n(n+1)} \quad \text{----} \quad \boxed{1}$$

$$a_n := \frac{n(-1)^n(x+1)^n}{2^n(n+1)} \quad \text{(Serinin Genel Terimi)}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+2)}\cdot\frac{2^n(n+1)}{n(-1)^n(x+1)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|}{2}\,\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{|x+1|}{2}$$

Oran (Bölüm) Kriterinden, $\frac{|x+1|}{2} < 1 \iff |x+1| < 2$ olduğunda $\boxed{1}$ serisi mutlak yakınsak, her mutlak yakınsak seri, yakınsak olacağı için de, $\boxed{1}$ serisi yakınsak olacaktır. O halde, $|x+1| < 2 \iff -2 < x+1 < 2 \iff -3 < x < 1$, yani, $x \in (-3,1)$ iken $\boxed{1}$ serisi yakınsaktır. Yukarıdan açıkça görülürki, $\boxed{\text{yakınsaklık yarıçapı} = R = 2}$'dir. Şimdi de köşe noktalarındaki durumu analiz edelim.

$x=1$ iken $\boxed{1}$ serisi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ alterne serisi olup $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \neq 0$ olup, seri IRAKSAK'tır.

$x=-3$ iken $\boxed{1}$ serisi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ pozitif terimli seri olup $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \neq 0$ olduğundan yine IRAKSAK'tır.

O halde, $\boxed{\text{yakınsaklık aralığı} = (-3,1)}$

2. Aşağıdaki özellikleri sağlayan birer örnek veriniz (açıklama yapmanıza gerek yoktur).

a. *(5 puan)* Monoton fakat yakınsak olmayan bir dizi,

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$$

b. *(5 puan)* Sınırlı fakat yakınsak olmayan bir dizi,

$$\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$$

c. *(5 puan)* Monoton artan ve yakınsak bir dizi,

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

d. *(5 puan)* $\{a_n\}$ sınırlı bir dizi olmak üzere, $\sum a_n$ ıraksak olan bir seri,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

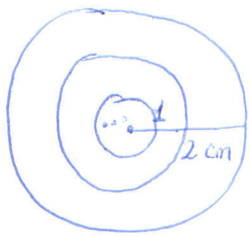
e. *(5 puan)* Alterne ıraksak bir seri,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

3. *(10 puan)* 2 cm yarıçapındaki bir çemberin içerisine, yarıçapı bir önceki çemberin yarıçapının yarısı olan bir çember çiziliyor. Elde edilen çemberin içerisine, yarıçapı son çizilen çemberin yarısı olan bir çember daha çiziliyor ve bu işlem sonsuz kez tekrarlanıyor. Çizilen çemberlerin yarıçaplarının toplamını bulunuz.

$r_1 = 2\ cm$

$r_2 = \frac{r_1}{2} = 1\ cm, \quad r_3 = \frac{r_2}{2} = \frac{r_1}{2^2} = \frac{1}{2}, \quad r_4 = \frac{r_3}{2} = \frac{r_1}{2^3} = \frac{1}{8}, \dots$



$$\text{yarıçaplar toplamı} = r_1 + r_2 + r_3 + \dots$$

$$= r_1 + \frac{r_1}{2} + \frac{r_1}{2^2} + \dots$$

$$= r_1 \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right]$$

$$= r_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = r_1 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4\ cm$$

4. Aşağıdaki serinin ve has olmayan integralin yakınsak veya ıraksaklığını belirleyiniz.

a. *(13 puan)* $\sum_{n=102}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n}$

Integral testini uygulayabiliriz. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$ ($x \geq 102$ için) $\ni n=102, \dots$ $f(n) = \frac{(\ln n)^3}{n}$ olarak tanımlanırsa, $f(x)$ pozitif, sürekli ve $f'(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}(3 - \ln x)$ $x \geq 102 > e^4$ için negatif olur, yani azalan bir fnk.

$$\int_{102}^{\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \lim_{A \to \infty} \int_{102}^{A} \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

$$\frac{u = \ln x}{du = \frac{1}{x} dx} \quad \lim_{A \to \infty} \int_{\ln 102}^{\ln A} u^3 du = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{4} (\ln A - \ln 102)$$

$= \infty$ (IRAKSAK)

Integral kriterinden,

$\sum_{n=102}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n}$ seriside IRAKSAK'tır.

b. *(12 puan)* $\int_0^{102} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

$x = 0$'da $\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ süreksiz!

$$\int_0^{102} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \lim_{K \to 0^+} \int_K^{102} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx = \lim_{K \to 0^+} \int_{\sqrt{K}+1}^{\sqrt{102}+1} \frac{2}{u} du$$

$1 + \sqrt{x} = u$ ve $x = K$ iken $u = \sqrt{K} + 1$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$ $\quad x = 102$ iken $u = \sqrt{102} + 1$

$$= 2 \lim_{K \to 0^+} \left[\ln(\sqrt{K} + 1) - \ln(\sqrt{102} + 1) \right]$$

$$= -2 \ln(\sqrt{102} + 1)$$

O halde, integral $\boxed{b}$ YAKINSAKTIR

5. *(20 puan)* $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki Taylor seri açılımını bulunuz. Yakınsaklık aralığını belirtiniz.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\ln x$	0
1	$\frac{1}{x}$	$1 = (-1)^{1+1}(1-1)!$
2	$-1/x^2$	$-1 = (-1)^{2+1}(2-1)!$
3	$+2/x^3$	$2 = (-1)^{3+1}(3-1)!$
4	$-2.3/x^4$	$-2.3 = (-1)^{4+1}(4-1)!$
5	$\frac{2.3.4}{x^5}$	$2.3.4 = (-1)^{5+1}(5-1)!$
6	$\frac{-2.3.4.5}{x^6}$	$-2.3.4.5 = (-1)^{6+1}(6-1)!$
⋮	⋮	⋮
k	$(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}$	$(-1)^{k+1}(k-1)!$

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$= \underbrace{f(1)}_{0} + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{(x-1)^k}{k}.$$

Oran kriterinden, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x-1| \cdot \frac{n}{n+1} = |x-1|$

olup, $-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$ iken elde edilen seri mutlak yakınsak sonuç olarakta yakınsaktır.

$x=0$ iken, seri $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k}$ harmonik serisi olacağından ıraksak

ve $x=2$ iken, seri $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ Alterne harmonik olup yakınsaktır.

O halde, $\boxed{\forall x \in (0, 2] \text{ için } \ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k} \text{'dır.}}$