MAT 102 Çalışma Soruları

1) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int \tan^3 x \sec x dx$

b) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 4x dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2} dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-2x-x^2}} dx$

e) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{17x} dx$

f) $\displaystyle\int \sec^3 x dx$

g) $\displaystyle\int e^{2x} \cos 3x dx$

h) $\int_2^5 \sqrt{1+x^4} x^7 dx$

ı) $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{z^3}{(4z^2+9)^{3/2}} dz$

j) $\int \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} d\theta$

k) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$

m) $\int_2^5 \sqrt{1+x^4} x^7 dx$

n) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$

Çözümler:

a) $\displaystyle\int \tan^3 x \sec x dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right) \tan x \sec x dx = I$

$\left(\substack{\sec x = u \\ \tan x \sec x dx = du}\right) \implies I = \displaystyle\int \left(u^2-1\right) du = \frac{u^3}{3} - u + c = \frac{\sec^3 x}{3} - \sec x + c$

b) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 4x dx = I$

$\cos^2 4x = \frac{1+\cos 8x}{2} \implies I = \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 8x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 8x}{16} \Big|_0^{2\pi} = \pi$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2} dx = \int \frac{x}{x^2+2} dx + \int \frac{2}{x^2+2} dx = I_1 + I_2 = I$

$\binom{x^2+2=u}{2xdx=du} \implies I_1 = \int \frac{1}{2u}du = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right), \ \ I_2 = \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx = \sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$

$\implies I = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) + \sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + c$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}^2-(x+1)^2}}dx = I$

$\binom{x+1=\sqrt{3}\sin u}{dx=\sqrt{3}\cos udu} \implies I = \int \frac{\sec u}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\cos udu = \int du = \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

e) $\int \frac{(\ln x)^2}{17x}dx = I$

$\binom{\ln x=u}{\frac{1}{x}dx=du} \implies I = \frac{1}{17}\int u^2du = \frac{u^3}{51} + c = \frac{(\ln x)^3}{51} + c$

f) $\int \sec^3 xdx = \int \sec x\sec^2 xdx = I$

$\binom{\sec x=u, \ \sec^2 xdx=dv}{\tan x\sec xdx=du, \ \tan x=v} \implies I = \sec x\tan x - \int \tan^2 x\sec xdx = \sec x\tan x - \int \left(\sec^2 x-1\right)\sec xdx = \sec x\tan x - \int \sec^3 xdx + \int \sec xdx$

$\implies I = \sec x\tan x - I + \ln|\sec x+\tan x| + c \implies I = \frac{\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|}{2} + c$

g) $\int e^{2x}\cos 3xdx = I$

$\binom{\cos 3x=u, \ e^{2x}dx=dv}{-3\sin 3xdx=du, \ \frac{e^{2x}}{2}=v} \implies I = \frac{e^{2x}\cos 3x}{2} + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3xdx$

$\binom{\sin 3x=u, \ e^{2x}dx=dv}{3\cos 3xdx=du, \ \frac{e^{2x}}{2}=v} \implies I = \frac{e^{2x}\cos 3x}{2} + \frac{3}{2}\left[\frac{\sin 3xe^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3xdx\right]$

$\implies I = \frac{e^{2x}\cos 3x}{2} + \frac{3e^{2x}\sin 3x}{4} - \frac{9}{4}I + c \implies I = \frac{2e^{2x}\cos 3x}{13} + \frac{3e^{2x}\sin 3x}{13} + c$

h) u=x^4 ise du=4x^{3}dx olur. Yeni integral sınırları ise u=16 ve u=625 olur. O halde:

$I = \int_2^5 \sqrt{1+x^4}x^7dx = \frac{1}{4}\int_{16}^{625} u\sqrt{1+u}du$

Şimdi s= u+1 ise ds=du olur. Yeni integral sınırları s=17 ve s= 626 olur. O halde:

$$I = \frac{1}{4}\int_{17}^{626}(s-1)\sqrt{s}ds = \frac{1}{4}\int_{17}^{626} s^{3/2}ds - \frac{1}{4}\int_{17}^{626} s^{1/2}ds$$

$$= \frac{s^{5/2}}{10}\Big|_{17}^{626} - \frac{s^{3/2}}{6}\Big|_{17}^{626}$$

$$= \frac{1}{10}(391876\sqrt{626} + \frac{1}{6}(17\sqrt{17} - 626\sqrt{626})$$

$$= \frac{1}{15}(586249\sqrt{626} - 391\sqrt{17}).$$

ı) u=z^2 ise du=2zdz olur. Yeni integral sınırları ise
u=0 ve u=$\frac{27}{4}$ olur. O halde:

$I = \int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{z^3}{(4z^2+9)^{3/2}} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{27}{4}} \frac{u}{(4u+9)^{3/2}} dz$

Şimdi s= 4u+9 ise ds=4du olur. Yeni integral sınırları
s=9 ve s= 36 olur. O halde:

$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{27}{4}} \frac{u}{(4u+9)^{3/2}} dz = \frac{1}{8} \int_9^{36} \frac{s-9}{4s^{3/2}} ds$

$$= \frac{1}{32} \int_9^{36} \frac{1}{s^{1/2}} ds - \frac{9}{32} \int_9^{36} \frac{1}{s^{3/2}} ds$$

$$= \frac{\sqrt{s}}{16}\Big|_9^{36} - \frac{9}{16\sqrt{s}}\Big|_9^{36} = \frac{3}{16} - \frac{3}{32} = \frac{3}{32}$$

j) u=1+sinx ise du=cosxdx olur. O halde:

$I = \int \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} d\theta = \int \frac{1}{u} du = \ln(u)$+C, C: sabit

$$= \ln(1+\sin x)\text{+C}$$

k) $\frac{x^4}{x^4-1}$ ifadesini basit kesirlere ayırırsak:

$\frac{x^4}{x^4-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + 1$ elde edilir.

O halde:

$I = \int \frac{x^4}{x^4-1} dx = \int (-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + 1) dx$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1} dx + \int dx$$

$$= -\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x-1) + x\text{+C; C: Sabit}$$

m) u=x^4 ise du=4x^{3}dx olur. Yeni integral sınırları ise
u=16 ve u=625 olur. O halde:

$I = \int_2^5 \sqrt{1+x^4}x^7 dx = \frac{1}{4}\int_{16}^{625} u\sqrt{1+u} du$

Şimdi s= u+1 ise ds=du olur. Yeni integral sınırları
s=17 ve s= 626 olur. O halde:

$I = \frac{1}{4}\int_{17}^{626} (s-1)\sqrt{s} ds = \frac{1}{4}\int_{17}^{626} s^{3/2} ds - \frac{1}{4}\int_{17}^{626} s^{1/2} ds$

$$= \frac{s^{5/2}}{10}\Big|_{17}^{626} - \frac{s^{3/2}}{6}\Big|_{17}^{626}$$

$$= \frac{1}{10}(391876\sqrt{626} + \frac{1}{6}(17\sqrt{17} - 626\sqrt{626})$$

$= \frac{1}{15}(586249\sqrt{626} - 391\sqrt{17}).$

n) $\frac{x^4}{x^4-1}$ ifadesini basit kesirlere ayırırsak:

$\frac{x^4}{x^4-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + 1$ elde edilir.

O halde:

$$I = \int \frac{x^4}{x^4-1}dx = \int(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + 1)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx + \int dx$$

$$= -\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x-1) + x + \text{C}; \text{ C: Sabit}$$

2. Aşağıdaki genelleştirilmiş integralleri hesaplayınız.

a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$

b. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sec x dx$

Çözüm: a.

$u = x$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = dx$, $v = e^x$ ile kısmi integrasyon

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0} xe^x dx$$

$$= \lim_{c\to-\infty}\left([e^x x]_c^0 - \int_c^0 e^x dx\right)$$

$$= \lim_{c\to-\infty}\left(-e^c c - [e^x]_c^0\right)$$

$$= \lim_{c\to-\infty}(-e^c c - [1 - e^c])$$

$$= \lim_{c\to-\infty}(e^c(1-c) - 1)$$

$\lim\limits_{c\to-\infty} e^c(1-c)$ limitini inceleyelim:

$$\lim_{c\to-\infty} e^c(1-c) \overset{0.\infty}{=} \lim_{c\to-\infty}\frac{(1-c)}{e^{-c}}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}, L'hopital}{=} \lim_{c\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-c}}$$

$$= \lim_{c\to-\infty} e^c$$

$$= 0$$

olduğundan

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{c\to-\infty}(e^c(1-c) - 1) = \lim_{c\to-\infty} e^c(1-c) - \lim_{c\to-\infty} 1 = 0 - 1 = -1$$

dir.

b. İntegral $x = \frac{\pi}{2}$ 'de dikey asimtota sahiptir ve $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında süreklidir.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sec x dx &= \lim_{c \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^c \sec x dx \\
&= \lim_{c \to \frac{\pi}{2}^-} [\ln(|\sec x + \tan x|)]_0^c \\
&= \lim_{c \to \frac{\pi}{2}^-} [\ln(|\sec c + \tan c|) - \ln(1+0)] \\
&= \infty
\end{aligned}$$

3. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklığını veya ıraksaklığını araştırınız.

a. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+e^{2x}} dx$ **b.** $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Çözüm: a. $f(x) = \frac{1}{x+e^{2x}}$ fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığında sürekli ve her $x \geq 1$ için

$$e^{2x} \leq x + e^{2x} \Rightarrow \frac{1}{x+e^{2x}} \leq \frac{1}{e^{2x}}$$

dir. $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{2x}} dx$ integralini inceleyelim.

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{2x}} dx &= \lim_{c \to \infty} \int_1^c \frac{1}{e^{2x}} dx \\
&= \lim_{c \to \infty} \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_1^c \\
&= \lim_{c \to \infty} \left(\frac{e^{-2c}}{-2} + \frac{e^{-2}}{2} \right) \\
&= \frac{e^{-2}}{2}
\end{aligned}$$

olduğundan $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{2x}} dx$ integrali yakınsaktır. O halde karşılaştırma testinden $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+e^{2x}} dx$ integrali de yakınsaktır.

b. $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığında sürekli ve her $x \geq 1$ için

$$1 \leq \sqrt{1+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

dir. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ integrali ıraksaktır çünkü $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ integrali $p \leq 1$ için ıraksar.

O halde karşılaştırma testinden $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ integrali de ıraksaktır.

Ayrıca $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ integralin değerini doğrudan hesaplayarak da integralin yakınsak ya da ıraksak olduğunu bulabiliriz.

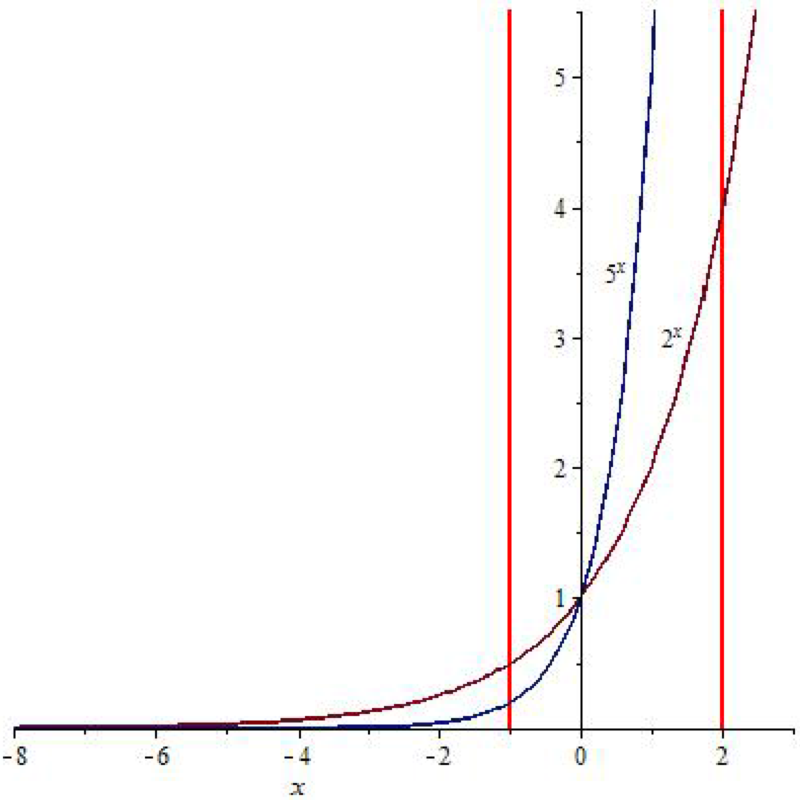
$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \\
&\overset{*}{=} \lim_{c\to\infty}\int_1^{\sqrt{c}} 2\sqrt{1+u}du \\
&\overset{**}{=} \lim_{c\to\infty}\int_2^{\sqrt{c}+1} 2\sqrt{v}dv \\
&= \lim_{c\to\infty}\left[\frac{4}{3}y^{3/2}\right]_2^{\sqrt{c}+1} \\
&= \lim_{c\to\infty}\left[\frac{4}{3}(\sqrt{c}+1)^{3/2} - \frac{4}{3}2^{3/2}\right] \\
&=\infty
\end{aligned}$$

olduğundan $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ integrali ıraksaktır.

(*) $u = \sqrt{x}$ değişken değiştirmesi yapılmıştır.
(**) $v = 1 + u$ değişken değiştirmesi yapılmıştır.

4. $y = 2^x$ ve $y = 5^x$ eğrileri ile $x = -1$ ve $x = 2$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.

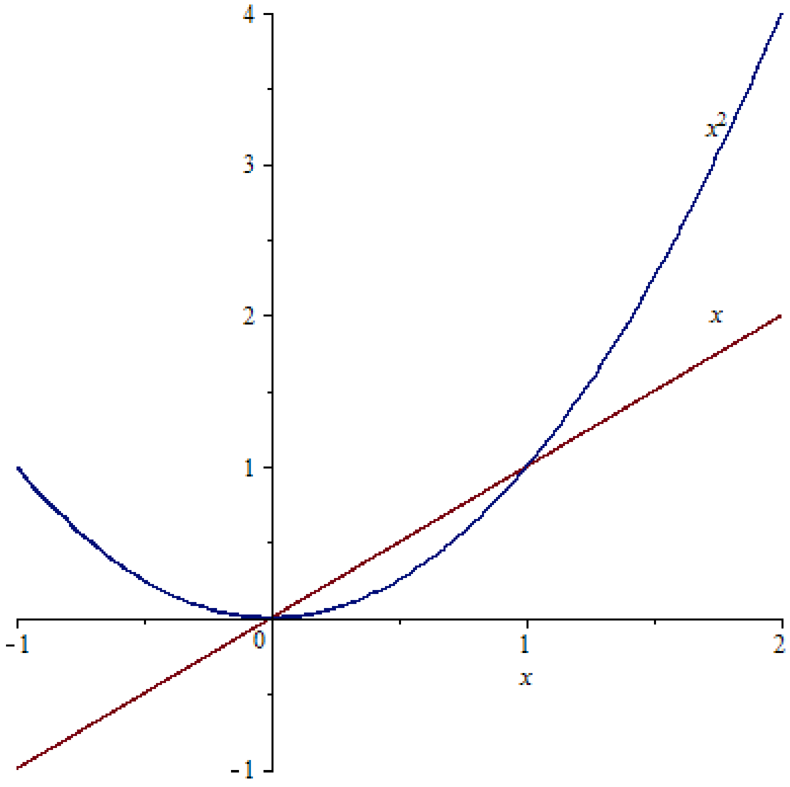
Çözüm:



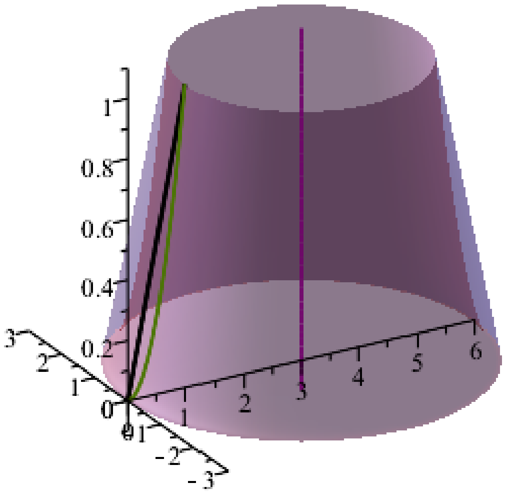
$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} |5^x - 2^x|\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} (2^x - 5^x)\, dx + \int_{0}^{2} (5^x - 2^x)\, dx \\
&= \left(\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{5^x}{\ln 5}\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2^x}{\ln 2}\right)_{0}^{2} \\
&= \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 5} - \frac{2^{-1}}{\ln 2} + \frac{5^{-1}}{\ln 5} + \frac{25}{\ln 5} - \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 2} \\
&= \frac{116}{5\ln 5} - \frac{5}{2\ln 2}
\end{aligned}
$$

5. $y = x$ ve $y = x^2$ eğrelileri arasında kalan bölgenin $x = 3$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:



$y = x$ ile $y = x^2$ eğrileri $(0, 0)$ ve $(1, 1)$ noktalarında kesişir.



The solid of revolution created on $0 \le x \le 1$ by rotation of $f(x) = x$ and $g(x) = x^2$ about the axis $x = 3$.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi \left[(y-3)^2 - (\sqrt{y}-3)^2\right] dy \\
&= \int_0^1 \pi \left[y^2 - 6y + 9 - y + 6\sqrt{y} - 9\right] dy \\
&= \int_0^1 \pi \left[y^2 - 7y + 6\sqrt{y}\right] dy \\
&= \pi \left[\frac{y^3}{3} - \frac{7y^2}{2} + 4y^{3/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{5}{6}\pi
\end{aligned}
$$

6) $x(t) = e^t \sin t$, $y(t) = e^t \cos t$ ile verilen eğrinin $t = 0$ dan $t = \pi$ ye kadar olan kısmının uzunluğunu hesaplayınız?

Çözüm: $\frac{dx}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^\pi e^t \sqrt{(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^\pi e^t \sqrt{2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = \sqrt{2} \int_0^\pi e^t\, dt = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$$

7) $y = e^{3x}$ eğrisinin x-ekseni etrafında çevrilmesi ile oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.

Çözüm: $\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$,

$$A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_a^b e^{3x} \sqrt{1 + (3e^{3x})^2}\, dx$$

$$u = 3e^{3x}$$
$$du = 9e^{3x} dx$$

$$= \frac{2\pi}{9} \int_{3e^{3a}}^{3e^{3b}} \sqrt{1 + u^2}\, du$$

$$= \frac{2\pi}{9} \left(\frac{u\sqrt{1+u^2}}{2} + \frac{1}{2} \log(u + \sqrt{1+u^2}) \Bigg|_{3e^{3a}}^{3e^{3b}} \right)$$

8) $r = 1+\cos\theta$ eğrisinin dışında ve $r = 3\cos\theta$ eğrisinin içinde kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm: $1+\cos\theta = 3\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} ((r_1)^2 - (r_2)^2)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} ((3\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)d\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (4 + 4\cos 2\theta - 2\cos\theta - 1)d\theta$$

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (\tfrac{3}{2} + 2\cos 2\theta - \cos\theta)d\theta$$

$$= \left[\frac{3\theta}{2} + \sin 2\theta - \sin\theta\right]_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

$$= \pi + \sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= \pi$$

9) Aşağıdaki dizilerin yakınsak veya ıraksak olup olmadıklarını belirleyiniz. Yakınsak ise limitini bulunuz.

a) $\left\{\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\left\{\frac{2^{n+1}+e^{n+1}}{2^n+e^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Çözüm:

a) $f(x)=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ sürekli fonsiyon olsun. $f(n)=a_n=\frac{\log n}{\sqrt{n}}$, her $n\geq 1$ için.

$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$

O halde $\left\{\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ yakınsaktır.

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+e^{n+1}}{2^n+e^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}[(\frac{2}{e})^{n+1}+1]}{e^n[(\frac{2}{e})^n+1]}=\lim_{n\to\infty}e\frac{(\frac{2}{e})^{n+1}+1}{(\frac{2}{e})^n+1}=e$

O halde dizi yakınsaktır.

10) Eğer $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ yakınsak ise $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $S_k=a_1+...+a_k$ olmak üzere $\{S_k\}$ serinin kısmi toplamlar dizisi olsun.Öyleyse, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ yakınsak olduğundan $\lim\limits_{k\to\infty}S_k=S$ olmak üzere limit mevcuttur. Ayrıca $a_k=S_k-S_{k-1}$ yazılabilir. O halde;

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}a_k &= \lim_{k\to\infty}(S_k-S_{k-1})\\ &= \lim_{k\to\infty}S_k-\lim_{k\to\infty}S_{k-1}\\ &= S-S\\ &= 0.\end{aligned}$$

11) Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyiniz.

a. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+3^n}$ c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ d. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$

Çözüm:

a) İntergral testini kullanalım. $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ olarak alınırsa fonksiyon $[3,\infty)$ aralığında sürekli, pozitif ve $f'(x)=-\frac{2\ln x+1}{2x^2(\ln x)^{\frac{3}{2}}}<0$ olup azalan , $n=3,4,5,...$ için ise $f(n)=a_n$ dir. Öyleyse,

$$\int\limits_3^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx=\int\limits_{\ln 3}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{u}}=\lim_{t\to\infty}\int\limits_{\ln 3}^{t}\frac{du}{\sqrt{u}}=\lim_{t\to\infty}(2\sqrt{t}-2\sqrt{\ln 3})=\infty$$

olup, integral ıraksak olduğundan $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ serisi ıraksaktır.

b) Karşılaştırma testini kullanalım. $n=1,2,3,...$ için

$$\begin{aligned}3^n+1 &> 3^n\\ \frac{1}{3^n+1} &< \frac{1}{3^n}\\ \frac{2^n}{3^n+1} &< \frac{2^n}{3^n} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+1}<\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ serisi geometrik seri olup, $r=\frac{2}{3}<1$ olduğundan yakınsaktır. Öyleyse, karşılaştırma testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+1}$ de yakınsaktır.

c) Karşılaştırma testini kullanalım. $n=1,2,3,...$ için

$$\begin{array}{rcl} n^3+1 & > & n^3 \\ \dfrac{1}{n^3+1} & < & \dfrac{1}{n^3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}} & < & \dfrac{1}{\sqrt{n^3}} \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \end{array}$$

olup $p=\frac{3}{2}>1$ olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ serisi yakınsaktır. Karşılaştırma testinden $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ serisi de yakınsaktır.

d) Limit karşılaştırma testini kullanalım. $a_n=\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ ve $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ olsun. Öyleyse,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$$

$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ olsun. $f(n)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$, her $n=1,2,3...$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}L.H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=1<\infty \qquad (1)$$

olduğundan, limit karşılaştırma testi gereğince a_n ve b_n nin karakterleri aynıdır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi $p=\frac{1}{2}<1$ olduğundan ıraksak olup $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ serisi de ıraksaktır.

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n 2^n n^n}{n!}\right|$ serisi yakınsak ise verilen seri mutlak yakınsaktır.Oran testini uygularsak,

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}{n+1!}\frac{n!}{2^n n^n}\right|=2\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right|=2e>1$$

olup seri ıraksaktır.Bu durumda verilen seri mutlak yakınsak değildir.

13. $\arctan x$ fonksiyonunun $a=0$ noktasındaki kuvvet serisini bulunuz.

Çözüm: $f(x)=\arctan x$ fonksiyonunu Mclaurine serisine açalım.Biliyoruz ki ,

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ \ |x|<1$$

Bu eşitliğin gerçeklendiği aralıkta (yani serinin yakınsaklık aralığında) x yerine $-x$ yazarsak, $|-x| = |x| < 1$ olacağından,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \ \ |x| < 1$$

yazılabilir.Şimdi son ifadede x yerine x^2 yazılırsa ise $|x| < 1$ için $\left|x^2\right| < 1$ olacağından

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \ , \ \ \left|x^2\right| < 1$$

yazılabilir.Şimdi de terim terime integral alınırsa ,

$$\int \frac{1}{1+x}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} dx, \ \ \left|x^2\right| < 1$$

Sonuç olarak

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \quad , \ \ \left|x^2\right| < 1$$

Son olarak ise x=0 diyerek integral sabiti 0 olarak bulunur.

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \ \ \left|x^2\right| < 1$$

Dikkat edilmelidir ki, bu eşitlik sadece $\left|x^2\right| < 1$ yakınsaklık aralığında gerçeklenir.Çünkü yakınsaklık aralığı dışındaki değerler için seri ıraksak olup eşitlik gerçeklenmez.

14) a) $f(x) = \ln x$ fonksiyonunu $a = 1$ komşuluğunda Taylor serisine açınız.

b) Elde ettiğiniz serinin yakınsaklık yarıçapını ve aralığını bulunuz.

Çözüm:.a)$f(x) = \ln x$ sonksiyonun $a = 1$ noktasında taylor serisine açalım.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a).(x-a)^k}{k!} = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+... \ \text{(Taylor Seri Açılımı)}$$

$f(x) = \ln x$ ve $a = 1$ olmak üzere

$$lnx = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + ...$$

$$\begin{array}{rcl} f(x) = \ln x & & f(1) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} & & f'(1) = 1 \\ f''(x) = -1.\frac{1}{x^2} & & f''(1) = -1 \\ f'''(x) = 1.2.x^{-3} & & f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) = -1.2.3x^{-4} & & f^{(4)}(1) = -6 \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ f^{(n)}(x) = (n-1)!(-1)^{n-1}x^{-n} & & f^{(n)}(1) \ = (n-1)!(-1)^{n-1} \end{array}$$

Bu durumda taylor serisine açarsak;

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$$

Bu eşitlik serinin sadece yakınsaklık aralığında gerçeklenir.Yani her x için doğru değildir.

b) Şimdi yakınsaklık aralığını yani bu eşitliğin gerçeklendiği aralığı bulalım.Oran testinden;

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

iken yakınsak olduğunu biliyoruz. Öyleyse,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1} \frac{n}{(x-1)^n.(-1)^{n-1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-1)n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-1)}{1+\frac{1}{n}}\right| \\
&= |x-1| < 1
\end{aligned}$$

olup yakınsaklık aralığı $0 < x < 2$ olaak bulunur.Şimdi ise uç noktaları inceleyelim:

$$x = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n}$$

seri harmonik seri olup ıraksaktır.

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

serisini elde ederiz.Alterne seri testinden yakınsaktır.Dolayısıyla yakınsaklık aralığı

$$0 < x \leq 2$$

olur.

15. Her $x \in [-0.3, 0.3]$ için, $\sin x$ fonskiyonu $x - \frac{x^3}{3!}$ polinomu ile yaklaşık olarak hesaplanmak isteniyor. Yapılabilecek maksimum hata nedir? $\sin(10°)$ yi yaklaşık olarak, en az beş basamak doğru olacak şekilde hesaplayınız.

Çözüm: n. basamaktan açılan bir Taylor serisinin hata payı x ile a arasında yer alan en az bir c için

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

dır. $f(x) = \sin x$ fonksiyonunu $a = 0$ civarında 3. basamaktan taylor serisini açarsak $x - \dfrac{x^3}{3!}$ polinomunu kullanmış oluruz. O halde

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x)$$

öyle ki $f^n(x) = sin(x + \frac{n\pi}{2})$ olmak üzere

$$R_3(x) = \frac{f^{4}(c)x^4}{4!} = \frac{\sin(c)x^4}{4!}$$

yazılabilir. Yani bu hatayı $\forall x \in [-0.3, 0.3]$ için maximize etmek istiyoruz. Bu noktada c x ile 0 arasında olduğundan x e bağlı değiştiğini gözlemlenerek

$$R_3^{'}(x) = sin(x)\frac{x^3}{(3)!} = 0 \Rightarrow x = 0$$

yazılabilir. Öyleyse kritik noktalar ve değerleri

$$\begin{aligned} x &= -0.3 \Rightarrow R_3^{'}(-0.3) = \sin(-0.3)\frac{(-0.3)^3}{3!} = 1.3500 \times 10^{-3} \\ x &= 0 \Rightarrow R_3^{'}(0) = 0 \\ x &= 0.3 \Rightarrow R_3^{'}(0.3) = \sin(0.3)\frac{(0.3)^3}{3!} = 1.3298 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

olup maximumunu aldığı noktanın $x = -0.3$ olduğu görülebilir. Bu durumda alacağı maximum hata

$$\max_{x\in[-0.3,0.3]} R_3(x) = 1.3500 \times 10^{-3}$$

olur. Şimdi $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ en az 5 basamak doğru olacak şekil hesaplayalım.Öyleyse hatamız 10^{-6} dan küçük olmalıdır ki hata 6. basamaktan sonra başlasın.

$$R_n(x) \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

olup

$$\left|f^{n+1}(x)\right| = |sinx| \leq 1 = M$$

olduğundan $a = 0$ ve $x = \frac{\pi}{18} = 0.17453 \in [-0.3, 0.3]$ olduğundan hata maximum değerini $x = -0.3$ da alıp

$$\frac{|-0.3|^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-6}$$

eşitsizliğini sağlayacak n yi arıyoruz. Öyleyse

$$3.10^{-n} \leq 10^{-7}(n+1)! \Rightarrow n \geq 7$$

olmalıdır.Sonuç olarak ise

$$\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) = \sum_{n=0}^{7}\frac{(-1)^n\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0.17364$$

olarak bulunur. Gerçek değer ise $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0.17364817766$

16. $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}}$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm:
$16 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$ ise $x^2 + y^2 + z^2 < 16$ olmalı.
O halde tanım kümesi
$TK = \{(x,y,z) \in R^2 : x^2 + y^2 + z^2 < 16\}'$dır.
$\sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2} > 0$ olduğundan $f(x,y,z) > 0$.
Öte taraftan $x^2 + y^2 + z^2$ sınıra yaklaşırken $\sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2} \to 0$ ve $f(x,y,z) \to \infty$ olur. Öyleyse $DK = (0, \infty)$ olur.

17. $g(x,y)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanıyor:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

g fonksiyonunun sürekli olduğu bölgeyi belirleyiniz.

Çözüm:

$(x,y) \neq (0,0)$ iken $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ fonksiyon olup, tanım kümesi $R^2 - \{(0,0)\}$ olup tanım kümesi üzerinde süreklidir. Şimdi $(x,y) = (0,0)$ noktasında sürekliliğini araştıralım:
Eğer $x = rcos(\theta), y = rsin(\theta)$ alınırsa
$g(r,\theta) = \frac{r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^4\cos^4(\theta)+r^2\sin^4(\theta)} = \frac{r\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}$ olup,
$r \to \infty$ iken olup $g(r,\theta) \to 0'$dır.

Eğer $y = x^2$ alınırsa
$g(x,y) = \frac{x^2x^2}{x^4+(x^2)^2} = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$ olup, $(x,y) \to (0,0)$ iken $g(x,y) \to \frac{1}{2}$ olur.
O halde $(0,0)$ noktasında limit mevcut olmdığından $(0,0)$ noktasında sürekli değildir.

18. $g(x,y)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanıyor:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^4}{x^4+y^4} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

g fonksiyonunun sürekli olduğu bölgeyi belirleyiniz.

Çözüm:
$(x,y) \neq (0,0)$ iken $g(x,y) = \frac{x^2y^4}{x^4+y^4}$ rasyonel bir fonksiyon ve tanım kümesi $R^2 - \{(0,0)\}$ olup, tanım kümesi üzerinde süreklidir.
Şimdi $(x,y) = (0,0)$ noktasında sürekliliğini araştıralım:
Eğer$x = rcos(\theta), y = rsin(\theta)$ alınırsa $g(r,\theta) = \frac{r^2\cos^2(\theta)\sin^4(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)}$ olup,
$r \to 0$ iken $(x,y) \to (0,0)$ olup $g(r,\theta) \to 0'$dır.
Fakat bu limitin sıfır olduğunu garantilemez bu yüzden iddiamızı ıspatlamalıyız.

$\forall\epsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ sayısı belirlemek gerekir, öyleki
$|(x, y) - (0, 0)| < \delta$ iken $|g(x, y) - 0| < \epsilon$ olduğunu göstermeliyiz.
$|(x, y) - (0, 0)| < \delta$ olsun. Bu durumda $x^2 + y^2 < \delta$ yazılabilir.
$|g(x, y) - 0| = |g(x, y)| = |\frac{x^2y^4}{x^4+y^4}| \le |\frac{x^2(x^4+y^4)}{x^4+y^4}| \le |x^2| \le |x^2 + y^2| < \delta$
O halde $\delta = \epsilon$ seçersek ispat tamamlanmış olur.
Bu ise $(x, y) \to (0, 0)$ iken $g(x, y) \to 0$ olduğunu garantiler.
Öte taraftan $g(0, 0) = 0$ olduğundan süreklilik tanımı gereği verilen fonksiyon $\mathbb{R}^2$ de süreklidir.

19) $h(x, y) = \sqrt{x + 3}e^{y-2}$ fonksiyonu verilsin:

a) $(1, 2, 2)$ noktasında yüzeye teğet olan düzlemin denklemini bulunuz.

b) Diferansiyeli kullanarak $\sqrt{3.99}e^{2.02}$ sayısını yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözüm:
a) $h(1, 2) = \sqrt{4}e^0 = 2$, $h_x = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}e^{y-2}, h_y = \sqrt{x + 3}e^{y-2}$

$\Longrightarrow\ h_x\,(1, 2) = \frac{1}{4}, h_y(1, 2) = 2$

$z - z_0 = h_x(1, 2)(x - x_0) + h_y(1, 2)(y - y_0)$

$\Longrightarrow\ z - 2 = \frac{1}{4}(x - 1) + 2(y - 2) \Longrightarrow\ x + 8y - 4z - 5 = 0$

b) $a = 4$ ve $b = 2$ alırsak, $dx = -0.01$ ve $dy = 0.02$ olur ve fonksiyonu da $f(x, y) = \sqrt{x}e^y$ seçebiliriz.

Bu yüzden $f_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^y, f_y = \sqrt{x}e^y$ olur.

O halde; $f(4, 2) = 2e^2, f_x(4, 2) = \frac{1}{4}e^2$ ve $f_y(4, 2) = 2e^2$ olmuş olur.

$\sqrt{3.99}e^{2.02} = f(4 - 0.01, 2 + 0.02) \simeq f(4, 2) + f_x(4, 2)dx + f_y(4, 2)dy$

$= 2e^2 + \frac{1}{4}e^2(-0.01) + 2e^2(0.02) = \frac{8.15}{4}e^2$

20) Aşağıdaki kısmi türevleri bulunuz.

a) Eğer $w = xy^2z^3, x = 3\sqrt{st}, y = \sin 2t, z = s+\ln(t+s)$ ise; $\frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial t}$ 'yi bulunuz.

b) Eğer $xe^y + xz + ze^y = 17$ ise; $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}$ ifadelerini bulunuz.

Çözüm:
a) $\frac{\partial w}{\partial s} = w_xx_s + w_yy_s + w_zz_s = y^2z^3\frac{3t}{2\sqrt{st}} + 0 + 3xy^2z^2(1 + \frac{1}{t+s})$

$= (\sin 2t)^2\,(s + \ln(t + s))^3\frac{3t}{2\sqrt{st}} + 3.3\sqrt{st}\,(\sin 2t)^2\,(s + \ln\,(s + t))^2\left(1 + \frac{1}{t+s}\right)$

$\frac{\partial w}{\partial t} = w_xx_t + w_yy_t + w_zz_t = y^2z^3\frac{3s}{2\sqrt{st}} + 2xyz^3.2\cos 2t + 3xy^2z^2.\frac{1}{t+s}$

$= (\sin 2t)^2\,(s + \ln(t + s))^3\,\frac{3s}{2\sqrt{st}} + 2.3\sqrt{st}\,(\sin 2t)\,(s + \ln(t + s))^3\,.2\cos 2t + 3.3\sqrt{st}$
$(\sin 2t)^2\,(s + \ln(t + s))^2\,\frac{1}{t+s}$

b) $e^y + z + x\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}e^y = 0 \implies \frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \frac{-z-e^y}{x+e^y}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-z-e^y}{x+e^y}\right) = \frac{-z_x(x+e^y)-(-z-e^y).1}{(x+e^y)^2} = 2\frac{z+e^y}{(x+e^y)^2}$

21) $h(x,y) = \sqrt{x+1}\ln(y-2)$ fonksiyonunun $(3,3)$ noktasında, $a = 3i - 4j$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulunuz. (Yani $D_u h(3,3)$'i hesaplayınız.)

Çözüm:
$h_x = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\ln(y-2), h_y = \frac{\sqrt{x+1}}{y-2} \implies \overrightarrow{\nabla h}\mid_{(3,3)} = 0i + 2j$ ve $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$

$D_u h(3,3) = \overrightarrow{\nabla h}\mid_{(3,3)} \bullet \overrightarrow{u} = \frac{-8}{5}$

22) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy^2 + 1$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. (maksimum, minimum ve semer noktalarını belirleyiniz).

Çözüm:
$f_x = 2x + y^2, f_{xx} = 2, f_y = 2y + 2xy, f_{xy} = 2y, f_{yx} = 2y$

$\binom{f_x=0}{f_y=0} \implies \binom{2x+y^2=0}{2y(1+x)=0} \implies K.N : (0,0), (-1,\sqrt{2}), (-1,-\sqrt{2})$

$D(x,y) = f_{xx}\mid_{(x,y)} .f_{yy}\mid_{(x,y)} - \left[f_{xy}\mid_{(x,y)} .f_{yx}\mid_{(x,y)}\right]$

$\implies$
$(0,0)$ noktasında $D(0,0) = 2.2 - 0 = 4 > 0$ ve $f_{xx} = 2 > 0$ olduğundan $(0,0)$ noktası yerel minimum noktası ve fonksiyonun yerel minimum değeri ise $f(0,0) = 1$ olur.

$(-1,\sqrt{2})$ noktasında $D(-1,\sqrt{2}) = 2.(2-2) - 8 = -8 < 0 \implies$ bu nokta semer noktası olur.

$(-1,-\sqrt{2})$ noktasında $D(-1,\sqrt{2}) = 2.(2-2) - 8 = -8 < 0 \implies$ bu nokta semer noktası olur.

23) $z = \sqrt{x^2+y^2}$ yüzeyi üzerinde bulunan ve $(3,2,0)$ noktasına en yakın olan noktayı bulunuz.

Çözüm: Uzayda herhangi bir (x,y,z) noktasının $(3,2,0)$ noktasına uzaklığı için $d^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2$ dir. (x,y,z) noktası $z = \sqrt{x^2+y^2}$ yüzeyinde olduğundan $d^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 13$ olur. $f(x,y) = d^2$ dersek :

$f_x = 4x - 6 = 0 \implies x = \dfrac{2}{3}$, $f_y = 4y - 4 = 0 \implies y = 1$

Demek ki $\left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$ tek kritik nokta.

$f_{xx} = 4,\ f_{yy} = 4,\ f_{xy} = 0 \implies D(a,b) = 4.4 - 0^2 = 16.$

$D\left(\dfrac{2}{3},1\right) = 16 > 0$ ve $f_{xx}\left(\dfrac{2}{3},1\right) = 4 > 0 \implies \left(\dfrac{2}{3},1\right)$ yerel min.

O halde, $z = \sqrt{x^2+y^2}$ yüzeyinde $(3,2,0)$ noktasına en yakın nokta

$$\left(\frac{2}{3}, 1, \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}\right) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{\sqrt{13}}{3}\right) \text{ noktasıdır.}$$

24) Türev yardımı ile $x^2y^2z = 1$ yüzeyi üzerinde bulunan ve orijine en yakın olan noktayı bulunuz.

Çözüm: Herhangi bir (x, y, z) noktasının orijine uzaklığı için $d^2 = x^2+y^2+z^2$ dir.

$x^2y^2z = 1 \implies z = \dfrac{1}{x^2y^2} \implies d^2 = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^4y^4}$. $f(x, y) = d^2$ için

$f_x = 2x - \dfrac{4}{x^5y^4} = 0 \implies x^6y^4 = 2$, $f_y = 2y - \dfrac{4}{x^4y^5} = 0 \implies x^4y^6 = 2$

Buradan $x = \pm\sqrt[10]{2}$ ve $y = \pm\sqrt[10]{2}$ bulunur.

$f_{xx} = 2 + \dfrac{20}{x^6y^4}$, $f_{yy} = 2 + \dfrac{20}{x^4y^6}$, $f_{xy} = \dfrac{16}{x^5y^5}$

$D\left(\pm\sqrt[10]{2}, \pm\sqrt[10]{2}\right) = (2 + 10)(2 + 10) - (8)^2 = 80 > 0$

ve $f_{xx}\left(\pm\sqrt[10]{2}, \pm\sqrt[10]{2}\right) = 12 > 0 \implies \left(\pm\sqrt[10]{2}, \pm\sqrt[10]{2}\right)$ yerel min.

O halde, $x^2y^2z = 1$ yüzeyinde orijine en yakın noktalar: $\left(\pm\sqrt[10]{2}, \pm\sqrt[10]{2}, \sqrt[3]{32}\right)$

25) $f(x,y) = x^2y$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 = 1$ üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm: $f(x,y) = x^2y \implies \nabla f = (f_x, f_y) = (2xy, x^2)$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \implies \nabla g = (g_x, g_y) = (2x, 2y)$

$f = \lambda \nabla g \implies 2xy = 2x\lambda$ ve $x^2 = 2y\lambda$

- $x = 0$ olursa birinci eşitlik sağlanır ve ikinci eşitlikten $y = 0$ ya da $\lambda = 0$ olur. Şayet $y = 0$ ise $x^2 + y^2 = 1$ ile çelişir. $\lambda = 0$ ise iki eşitlikte sağlanır ve $x^2 + y^2 = 1$ eşitliğinden $y = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ bulunur.
- $x \neq 0$ ise $y = \lambda$ bulunur. İkinci eşitlikten $x^2 = 2\lambda^2$ olur.
  $x^2 + y^2 = 1 \implies 2\lambda^2 + \lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$
$$\lambda = \frac{-1}{\sqrt{3}} \implies y = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ maks.}$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-2}{3\sqrt{3}} \text{ min.}$$

$f(0, \pm 1) = 0$ elde edilir.

26) : $f(x,y) = e^{-xy}$ fonksiyonun $x^2 + 4y^2 \leq 1$ bölgesindeki mutlak maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm:

Verilen bölge elips olup kapalı ve sınırlıdır.Ayrıca f fonksiyonu bu bölgede süreklidir.

Bu durumda mutlak ekstrememum noktalarını bulmak için fonksiyonun iç ve sınır noktalarındaki ekstremumlarını bulmamız gerekmektedir.

1.İç noktaları inceleyelim

$f_x = -ye^{-xy} = 0$
$\rightarrow y = 0$

$f_y = -xe^{-xy} = 0$
$\rightarrow x = 0$
buluruz.Bu da bize (x,y)=(0,0) verir ve f 'nin değeri
$f(0,0) = 1$
olur.

Bu durumda fonksiyon elipsin iç noktasında bir tane ekstremum noktası vardır o da

$f(0,0) = 1$

noktasıdır.
2.Sınır Noktalarındaki ekstremum noktalarını inceleyelim.
Bu elipsin sınır noktaları ,
$x^2 + 4y^2 = 1$
$f(x, y) = e^{-xy}$ ve $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1$ olmak üzere
$\begin{array}{c} \nabla f = \lambda \nabla g \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{array}$

Yani;

$$-ye^{-xy} = \lambda 2x \tag{2}$$

$$-xe^{-xy} = \lambda 8y \tag{3}$$

$$x^2 + 4y^2 = 1 \tag{4}$$

(2) denklemini x ile,(3) denklemini y ile çarparsak:

$$-xye^{-xy} = \lambda 2x^2 \tag{5}$$

$$-xye^{-xy} = \lambda 8y^2 \tag{6}$$

(5) ve (6) denklemlerinden $2\lambda(x^2 - 4y^2) = 0$ elde edilir. O halde;

$$\lambda = 0 \tag{7}$$

veya

$$x^2 = 4y^2 \tag{8}$$

olmalıdır. (4) ve (8) denklemlerinden
$2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$ elde edilir.
Eğer $\lambda = 0$ ise $x = 0$ ve $y = 0$ fakat $0^2 + 4.0^2 \neq 1$ olacağından $\lambda \neq 0$ olmak zorundadır.
Sonuç olarak;
$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = e^{-1/4} < 1$
$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) = e^{1/4} > 1$
$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}) = e^{1/4} > 1$
$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}) = e^{-1/4} < 1$
olduğundan $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ ve $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$ mutlak maksimum, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ ve $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$ mutlak mininmumdur.

27) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{y}{1+xy}.dxdy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{y}{1+xy}.dxdy$$

$$\begin{aligned}
1+xy &= u \Rightarrow ydx = du \\
\int_0^1\int_1^{1+y} \frac{1}{u}.dudy &= \int_0^1 \ln|u|_1^{1+y}\,dy \\
&= \int_0^1 \ln(1+y)dy \\
1+y &= z \text{ olsun.} \Rightarrow dy = dz \\
&= \int_1^2 \ln(z)dz \\
\ln(z) &= u, dz = dv \text{ olsun. } \Rightarrow \frac{dz}{z} = du, z = v \\
&= [\ln(z)z]_1^2 - \int_1^2 dz \\
&= 2\ln 2 - 1
\end{aligned}$$

28) Yarıçapı 3cm olan yarım kürenin $\int\int$ integral yardımıyla hacmini hesaplayınız.

Çözüm:

V= $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt[2]{9-x^2}}^{\sqrt[2]{9-x^2}} \sqrt[2]{9-x^2-y^2}.dydx$

Bu soruyu çözebilmek için kutupsal koordinatları kullanalım.

$x = r.cos\theta$
$y = r.sin\theta$
$dxdy = rdrd\theta$

Bu durumda,

V= $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt[2]{9-r^2}.r.drd\theta$

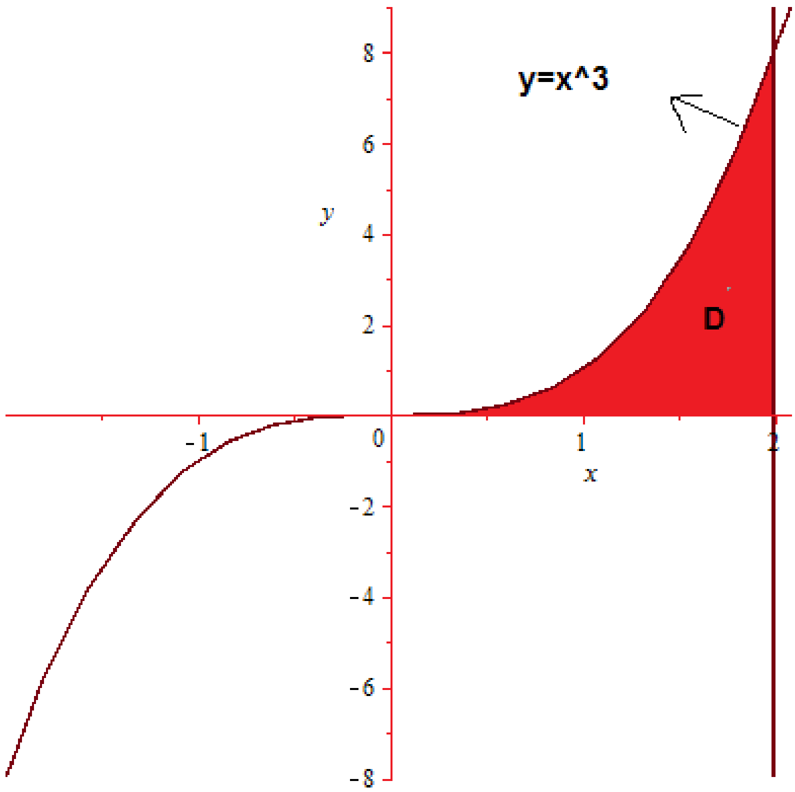
$=\displaystyle\int_0^{2\pi} (\frac{(9-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3})|_0^3 d\theta$

$=\displaystyle\int_0^{2\pi} 27d\theta$

$=54\pi$

29) $\int\limits_0^8 \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dxdy$ integralini hesaplayınız. (İpucu: İntegrasyon bölgesini çiziniz ve integral sırasını değiştiriniz.)

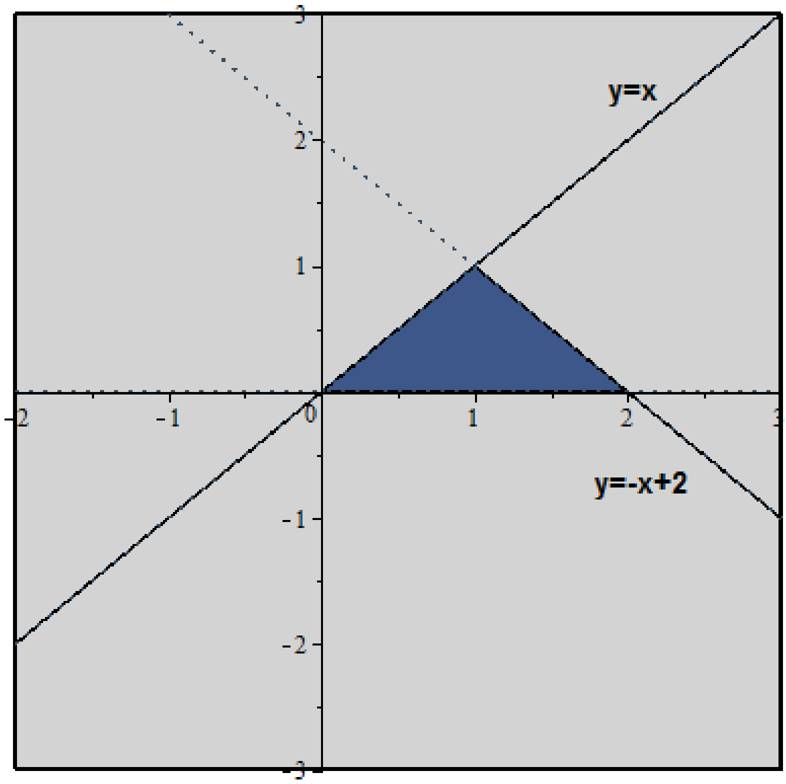
Çözüm: $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 8, \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^3\}$

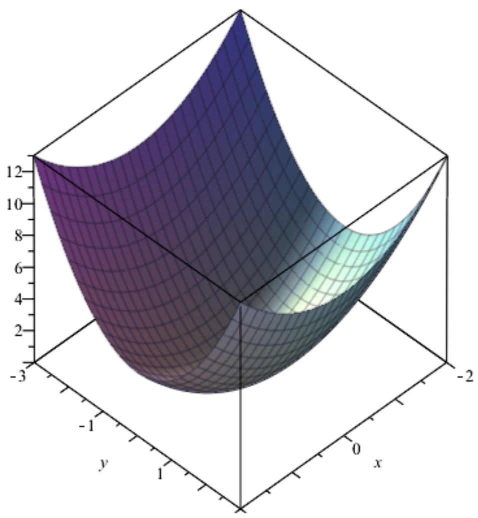


$$
\begin{aligned}
\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy &= \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx \\
&= \int_0^2 e^{x^4} \, [y]_0^{x^3} \, dx \\
&= \int_0^2 e^{x^4} x^3 dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^2 4 e^{x^4} x^3 dx \\
&= \frac{1}{4} [e^{x^4}]_0^2 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1)
\end{aligned}
$$

30) Yukarıdan $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve aşağıdan $xy-$düzlemi üzerinde bulnan ve sınırları $y = x, x = 0$ ve $x + y = 2$ doğruları olan üçgen bölge ile sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm:

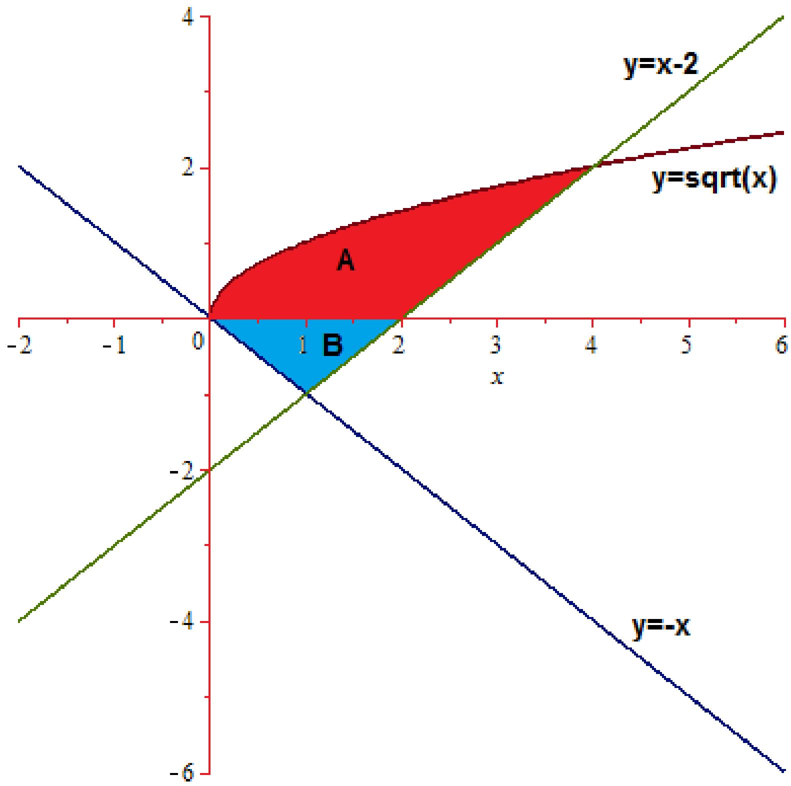




$$
\begin{aligned}
Hacim &= \int_0^1 \int_y^{2-y} (x^2+y^2)dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_y^{2-y} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^3}{3} + (2-y)y^2 - \frac{y^3}{3} - y^3\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{8}{3}y^3 + 4y^2 - 4y + \frac{8}{3}\right) dy \\
&= \left(-\frac{8}{12}y^4 + \frac{4}{3}y^3 - 2y^2 + \frac{8}{3}y\right)_0^1 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

31) $y=\sqrt{x}$ eğrisi ile $y=x-2$ ve $y=-x$ doğruları ile sınırlanan bölgeyi çiziniz ve bu bölgenin alanını ardışık iki katlı integral olarak ifade ediniz ve integrali hesaplayınız.

Çözüm:



$y=\sqrt{x}$ ile $y=x-2$ eğrisinin kesiştiği noktayı bulalım:

$\sqrt{x}=x-2 \Rightarrow x=4-2x+x^2 \Rightarrow x^2-3x+4=0 \Rightarrow x=4$ ($x \neq -1$, çünkü $y=\sqrt{x}$ olduğundan $x \geq 0$ olmalıdır.)

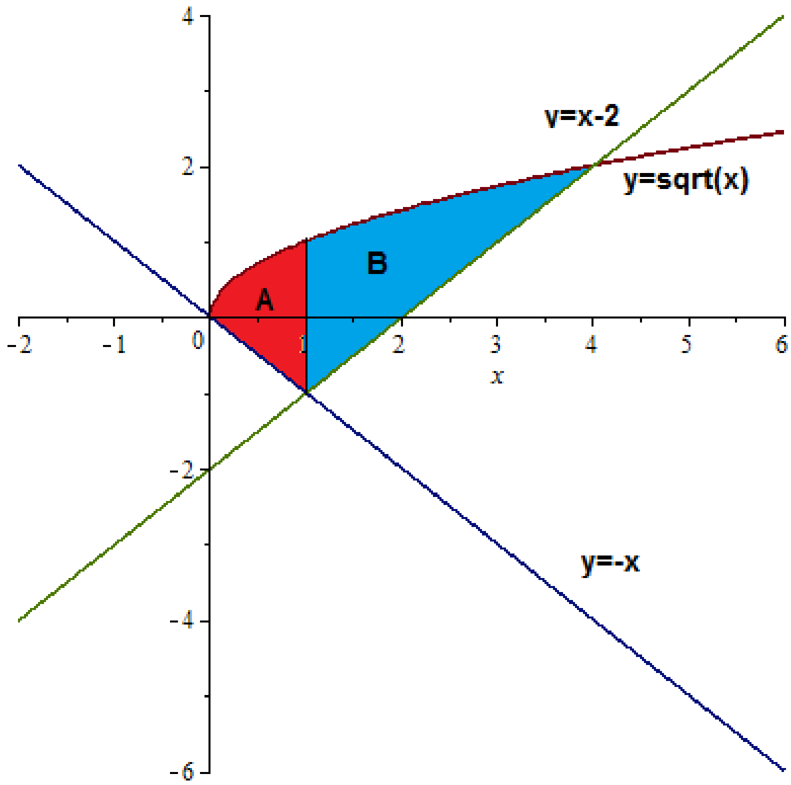
$x=4 \Rightarrow y=2$ bulunur.

$y=-x$ ile $y=x-2$ eğrisinin kesiştiği noktayı bulalım:

$-x=x-2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1$ bulunur.

$$
\begin{aligned}
Alan &= A + B \\
&= \int_{y=0}^{2}\int_{x=y^2}^{y+2} 1dxdy + \int_{y=-1}^{0}\int_{x=-y}^{y+2} 1dxdy \\
&= \int_{0}^{2} [x]_{y^2}^{y+2}\, dy + \int_{-1}^{0} [x]_{-y}^{y+2}\, dy \\
&= \int_{0}^{2} (y+2-y^2)dy + \int_{-1}^{0} (y+2+y)dy \\
&= \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 + \left[y^2+2y\right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

2.Yol:



$y = \sqrt{x}$ ile $y = x - 2$ eğrisinin kesiştiği noktayı bulalım:

$\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = 4 - 2x + x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ ($x \neq -1$, çünkü $y = \sqrt{x}$ olduğundan $x \geq 0$ olmalıdır.)

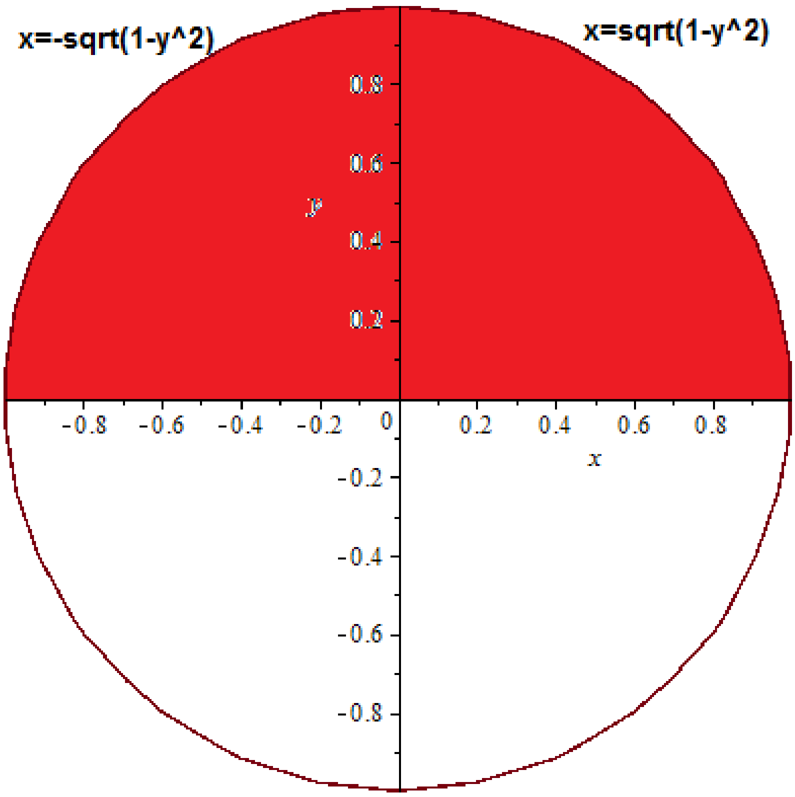
$y = -x$ ile $y = x - 2$ eğrisinin kesiştiği noktayı bulalım:
$-x = x - 2 \Rightarrow x = 1$

$$
\begin{aligned}
Alan &= A + B \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=-x}^{\sqrt{x}} 1 dy dx + \int\limits_{x=1}^{4} \int\limits_{y=x-2}^{\sqrt{x}} 1 dy dx \\
&= \int\limits_{0}^{1} [y]_{-x}^{\sqrt{x}}\, dx + \int\limits_{1}^{4} [y]_{x-2}^{\sqrt{x}}\, dx \\
&= \int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x} + x) dx + \int\limits_{1}^{4} (\sqrt{x} + 2 - x) dx \\
&= \left[\frac{2x^{3/2}}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^{3/2}}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^4 \\
&= \frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

32) Aşağıdaki integrali hesaplayınız. (İpucu: Kutupsal koordinatlara çeviriniz.)

$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy.$$

Çözüm: İntegrasyon bölgesi: $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$



$D = \{(x,y), -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ olarak ifade edilirse

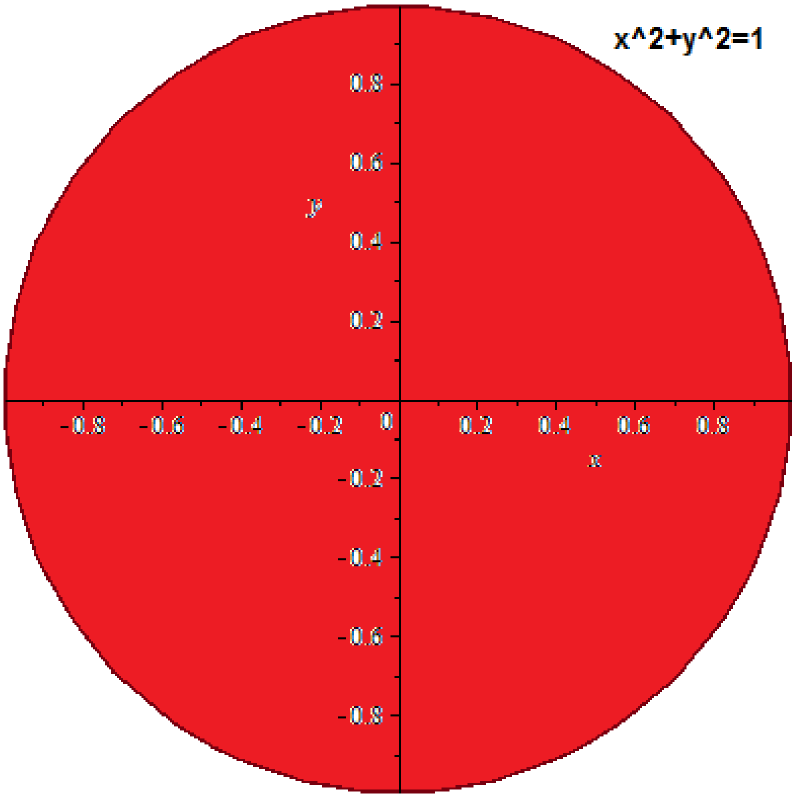
$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \ln(x^2+y^2+1)dydx$$

$x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ olmak üzere $dydx = rdrd\theta$ dir.

$$
\begin{aligned}
\int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \ln(x^2+y^2+1)dydx &= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{1} \ln(r^2+1)rdrd\theta \\
r^2+1 &= u \ \Rightarrow 2rdr = du \\
&= \int_0^{\pi}\int_1^{2}\frac{1}{2}\ln(u)dud\theta \\
&= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[u\ln(u)-u\right]_1^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[2\ln(2)-2+1\right]\int_0^{\pi} d\theta \\
&= (\ln(2)-\frac{1}{2})\left[\theta\right]_0^{\pi} \\
&= (\ln(2)-\frac{1}{2})\pi
\end{aligned}
$$

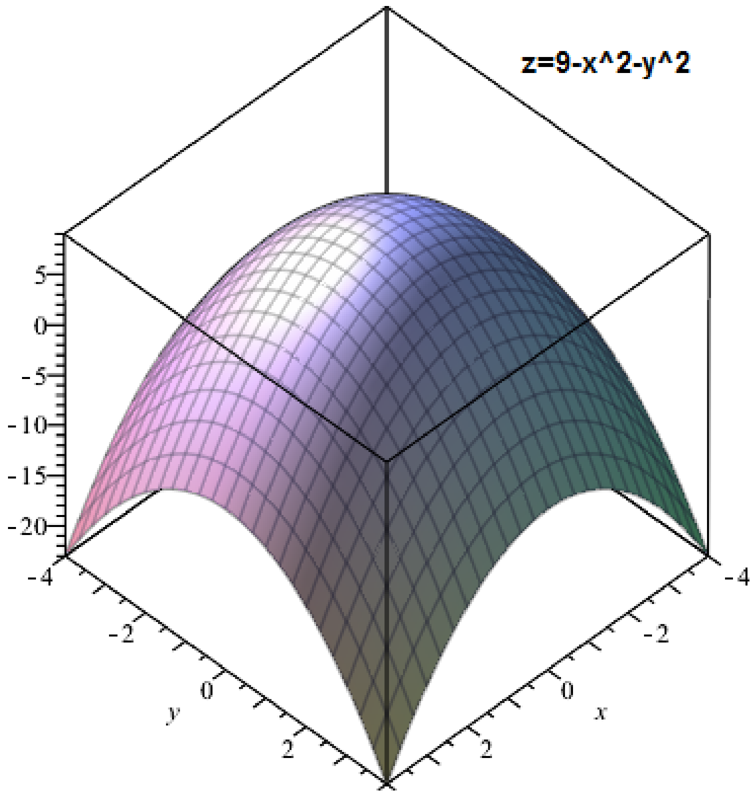
33) Üstten $z = 9 - x^2 - y^2$ paraboloidi ve alttan ise $xy-$düzlemindeki birim çember ile sınırlanan katı cismin hacmini hesaplayınız.

Çözüm: İntegrasyon bölgesi: $D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$



$x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ olmak üzere $dydx = rdrd\theta$ dir.

$$\begin{aligned}
Hacim &= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (9 - x^2 - y^2) dydx \\
&= \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} (9 - r^2) r d\theta dr \\
&= 2\pi \int_{0}^{1} (9r - r^3) dr \\
&= 2\pi \left[\frac{9}{2} r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\
&= \frac{17}{2}\pi
\end{aligned}$$


z=9-x^2-y^2
5
0
-5
-10
-15
-20
-4
-2
0
2
y
-4
-2
0
2
x