ANAHTAR

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2015-2016 BAHAR DÖNEMİ
MAT 102, MATEMATİK II, FİNAL SINAVI
28 ŞUBAT 2016

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (15 p.)	2. (10 p.)	3. (15 p.)	4. (10 p.)	5. (30 p.)	6. (20 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir.
Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. Kutupsal koordinatlarda $r = 1 - \cos\theta$ ve $r = \cos\theta$ ile verilen eğrileri çiziniz ve kesişim bölgesinin alanını veren integrali yazınız. (İntegrali hesaplamayınız)

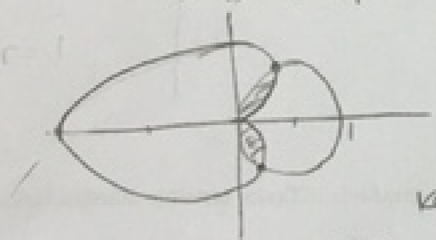
$r = \cos\theta \Rightarrow r^2 = r\cos\theta$

$x^2 + y^2 = x$

$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ çember

$r = 1 - \cos\theta = 1 - \cos(-\theta)$

x-eksenine göre simetrik



θ	r
0	0
$\pi/3$	1/2
$\pi/2$	1
$2\pi/3$	3/2
π	2

Kesişim noktaları: $1 - \cos\theta = \cos\theta$

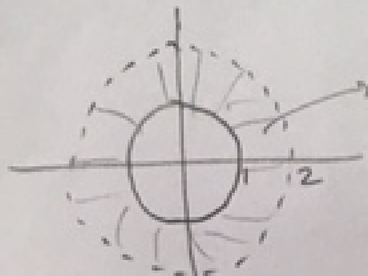
$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$

Kesişim bölgesinin alanı $= \frac{1}{2} \cdot 2\left[\int_0^{\pi/3} (1-\cos\theta)^2\, d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta\right]$

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$ iki değişkenli fonksiyonun tanım kümesini belirleyiniz ve bu bölgeyi düzlemde gösteriniz.

$x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0$ ve $4 - x^2 - y^2 > 0$ olmalıdır.

Buradan $1 \leq x^2 + y^2 < 4$ bulunur.



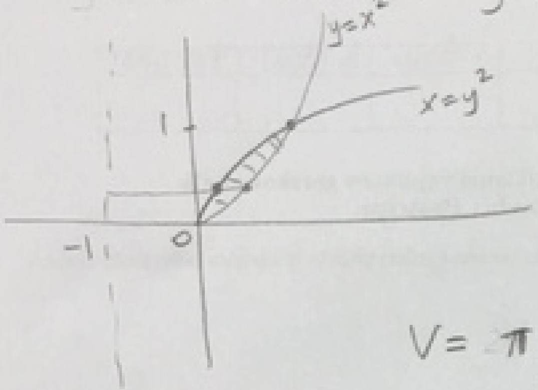
Tanım Kümesi

3. Düzlemde $y = x^2$ ve $x = y^2$ tarafından sınırlanan bölgeyi çiziniz ve bu bölgenin $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz. 5.

Kesişim noktaları: $y = x^2 \Rightarrow x = y^2 = x^4$

$$x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$x = 0$ ve 1



$$V = \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{y}+1)^2 - (y^2+1)^2 \right] dy$$

$$V = \pi \int_0^1 \left[y + 2\sqrt{y} + \cancel{1} - y^4 - 2y^2 - \cancel{1} \right] dy$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2}y^2 + 2 \cdot \frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^5}{5} - \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{29}{30}\pi$$

4. $\sin(2x)(1+2x)^{1/2}$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun $x = 0$ etrafındaki Taylor serisinin sıfırdan farklı ilk 3 terimini yazınız.

$$\sin(2x) = 2x - \frac{8x^3}{3} + \cdots$$

$$(1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} (2x)^2 + \cdots$$

$$= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \cdots$$

$$\sin(2x) \cdot (1+2x)^{\frac{1}{2}} = \left(2x - \frac{8x^3}{3} + \cdots\right)\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \cdots\right)$$

$$= 2x + 2x^2 - \frac{7x^3}{3} - \cdots$$

5. (a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2 2^n}{n!}$ serisinin mutlak ve şartlı yakınsaklığını belirleyiniz.

Mutlak Yakınsaklık için

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 2^n}{n!} \Rightarrow$ oran testi ile $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^2 2^n}$

$= \frac{2(n+1)}{n^2} \to 0$

Dolayısıyla seri mutlak yakınsaktır.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n(x-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{4^{n+1}(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+3}}\cdot\frac{\sqrt{n+2}}{4^n(x-1)^n}\right| = 4\cdot\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}}\cdot|x-1| \to 4|x-1|$$

$4|x-1| < 1 \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{4} = R$ yakınsak yarıçapı

$-\frac{1}{4} < x-1 < \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$

uç değerler: $x=\frac{3}{4}$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$

$p=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ ıraksar

$x=\frac{5}{4}$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$

Alterne seri
- $a_{n+1} < a_n$
- $a_n \to 0$

Yakınsar

Yakınsaklık aralığı : $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$

6. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ ile tanımlı fonksiyon veriliyor.

(a) Eğer varsa $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitini hesaplayınız.

Eşlenik ile çarpalım ve bölelim

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{(x^2+y^2)}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\cancel{(x^2+y^2)}} = 2.$$

(b) $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli olacak şekilde tanımlanabilir mi?

$f(0,0) = 2$ olarak tanımlanırsa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

olacağı için sürekli olur