MAT 102-MATEMATİK 2 (2011-2012 BAHAR YAZ DÖNEMİ)
FİNAL SINAVI ÇALIŞMA SORULARI

1. Aşağıdaki limitleri (varsa) bulunuz.

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^4}$ (yok)

   b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$ (0)

   c) $\lim_{(x,y)\to(\pi,\frac{1}{4})} x^2\tan(xy)$ (π^2)

   d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ $(\frac{1}{2})$

   e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (yok)

   f) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$ (0)

2. Aşağıdaki fonksiyonların sürekli oldukları kümeleri bulunuz.

   a) $f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}$ $\quad (S_f=\{(x,y)\mid x^2-y^2\neq 0\})$

   b) $f(x,y,z)=\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2-1}$ $\quad (S_f=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\neq 1\})$

   c) $f(x,y,z)=x\ln(yz)$ $\quad (S_f=\{(x,y,z)\mid yz>0\})$

3. Aşağıdaki fonksiyonların kısmi türevlerini bulunuz.

   a) $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

   b) $f(x,y,z)=e^{\frac{xy}{z}}$

   c) $f(x,y)=\cos\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$

4. a) $u=\sin(xy)+\cos(xz)+\tan(yz) \Longrightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=?$

   b) $z=f(x,y)=\sin^2(3x-4) \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=?, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=?$

5. a) $z=txy^2, x=t+\ln(y+t^2)$ ve $y=e^t \Longrightarrow \frac{dz}{dt}=?$

   b) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2); x=tu, y=\frac{t}{u} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}=?, \frac{\partial f}{\partial u}=?$

6. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2-4y^2}{x-2y} & x\neq 2y \\ g(x) & x=2y \end{cases}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ de sürekli ise $g(x)$ ne olmalıdır.

7. $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu için $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ olduğunu gösteriniz ve nedenlerini araştırınız.

8. $F(x,y,z)=x^3e^{y+z}-y\sin(x-z)=0$ ise $\frac{\partial z}{\partial x}=?$

9. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ da türevlenebildiğini gösteriniz.

10. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+4y^3} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ olarak tanmlanyor. $f_x(0,0)=?$ $f_y(0,0)=?$.

11. Aşağıdaki limitleri bulunuz, limit yoksa olmadığını gösteriniz.

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

   b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{e^{-x^2}-y}{x^2+y^2}$

12. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ olsun,

a) $f, (0,0)$ noktasında sürekli mi?

b) $f_x(x,y) = ?, f_y(x,y) = ?$

c) $f_{yx}(0,0) = ?$

13. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ olsun,

a) $f, (0,0)$ noktasında sürekli mi?

b) $f_x(0,0)$ değeri var mı?

c) $f_{xx}(0,0)$ değeri var mı?

14. $z = f(xy, e^x y)$ olsun

a) $z_x = ?, z_y = ?$

b) $f_1(0,0) = 1, f_2(0,0) = 1$ olmak üzere $z = f(xy, e^x y)$ grafiğinin $(0,0)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

c) $x-$ekseniyle b şıkkında verilen düzlem arasındaki uzaklığı bulunuz.

15. $w(x,y) = f(x^2+y^2, xy, 2x)$ ve f, 2. dereceden sürekli kısmi türevlere sahip olmak üzere $w_{yx}(x,y) = ?$

16. a) $e^{0.1}\ln(0.8)$ in yaklaşık değerini $f(x,y) = e^x \ln y$ fonksiyonunu kullanarak bulunuz.

b) $f(x,y) = e^x \ln y$ fonksiyonu $(0,1)$ noktasında hangi doğrultuda en hızlı artar?Ve bu doğrultudaki artış oranı nedir?

c) $\overrightarrow{u} = i + j$ olmak üzere $D_u f(0,1) = ?$

17. $f(x,y)$ fonksiyonu $P_0 = (x_0, y_0)$ noktasında 1. dereceden kısmi türevlere sahip olsun. $\overrightarrow{v} = i + j$ olmak üzere $D_v f(P_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ve f nin P_0 noktasında maksimum değişim oranı 1 olsun. $f_x(P_0)$ ın bütün olası değerlerini bulunuz.

18. $z = f(x,y)$ fonksiyonu kapalı olarak $x^2 + yz - \ln(xz) = 1$ şeklinde tanımlanmış olsun.

a) $z = f(x,y)$ fonksiyonunun grafiğinin $(x,y,z) = (1,0,1)$ noktasındaki normal doğrusunu bulunuz.

b) a şıkkında verilen doğru $x + y + z = 0$ düzlemiyle kesişir mi?Kesişiyorsa hangi noktada kesişir?

19. $z^2 + 100 = 2x^2 + 2y^2$ yüzeyinde bulunan, $x + y = 1$ düzlemine paralel olan teğet düzlemlerine sahip bütün noktaları bulunuz.

20. $z = f(x,y)$ fonksiyonu kapalı olarak $xz^3 + y^3 + x^3 + z = 4$ şeklinde verilmiş olsun.

a) $(0,1)$ noktasında z_x ve z_y yi bulunuz.

b) $f(0.01, 0.99)$ nın yaklaşık değerini teğet düzlemi(lineer) yakınsamasıyla bulunuz.

21. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ yüzeyine (elipsoid) $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki teğet düzleminin ve normal doğrusunun denklemlerini yazınız.

CEVAP: $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} + \dfrac{z_0 z}{c^2} = \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2}$ (teğet düzlemi)

$\dfrac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \dfrac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \dfrac{z - z_0}{\frac{z_0}{c^2}}$ (normal doğrusu)

22. $z = f(x,y) = xy$ yüzeyine $P_0 = (2,-2,-4)$ noktasındaki teğet düzlemi ve normal doğrusunun denklemlerini yazınız.

CEVAP: $2x - 2y + z - 4 = 0$ (teğet düzlemi) $\quad \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+4}{-1}$ (normal doğrusu)

23. a) $z = \sin(xy)$ fonksiyonunun grafiğinin $(\dfrac{\pi}{3}, -1)$ noktasındaki teğet düzlem denklemini ve normal doğrusunun denklemini yazınız.

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ fonksiyonunun $P_0 = (1,2,3)$ noktasındaki ve $\overrightarrow{v} = -2i + j - 2k$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulunuz. (4)

24. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonu verilsin buna göre

a) $\nabla f(0,0)=?$

b) $\overrightarrow{u}=i+j$ vektörü için $D_u f(0,0)=?$

c) $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ da türevlenebilir midir? Neden?

25. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ da sürekli ve kısmi türevlere sahip olduğunu gösteriniz.

26. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $P_0=(3,4)$ noktasındaki $L(x,y)$ lineerleştirmesini yazınız ve bundan faydalanarak $\sqrt{(2.98)^2+(4.03)^2}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

CEVAP:5. 012

27. Teğet düzlemi yaklaşımını (doğrusal yaklaşım) kullanarak $e^{0.1}\ln(0.9)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız. (-0.1)

28. $z=f(x,y)$ fonksiyonu için $f(1,2)=3, f_x(1,2)=2$ ve $f_y(1,2)=5$ olduğu biliniyor. $f(1.1,1.8)$ in değerini yaklaşık olarak bulunuz. $(f(1.1,1.8)\approx 2.2)$

29. $f(x,y,z)=\dfrac{xy^2}{1+z^2}$ ise, $f(1.01,1.98,2.03)$ ün yaklaşık değerini bulunuz. (0. 7728)

30. Aşağıdakilerin yaklaşık değerlerini bulunuz.

a) $\sin(31°)\cdot\cos(58°)$

b) $(1.002)(2.003)^2(3.004)^3$

31. $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ eşitliği veriliyor. Başlangıç durumunda $x=100$ ve $y=25$ dır. x 30 artar ve y, 5 azalırsa z de nasıl bir değişiklik olur. (Diferansiyel yardımıyla zebilirsiniz) $(\dfrac{1}{z^2}dz=\dfrac{1}{x^2}dx+\dfrac{1}{y^2}dy\Longrightarrow\cdots\Rightarrow dz=-2)$

32. $f(x,y)=3x^2y+y^3-108y$ fonksiyonunun maksimum, minimum ve eyer noktalarını bulunuz. ($(\pm 6,0)$ eyer noktası, $(0,6)$ yerel min. , $(0,-6)$ yerel maks.)

33. $f(x,y)=xy(3-x-y)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve bu kritik noktalarda yerel maksimum ve minimum değerleri alıp almadığını belirleyiniz.

CEVAP:Kritik noktalar (0, 0), (3, 0), (0, 3) ve (1, 1). (0, 0), (3, 0) ve (0, 3) noktaları eyer(semer) noktaları. $f(1,1)=1$ yerel maksimum değeri.

34. Aşağıdaki fonksiyonların tüm kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

a) $f(x,y)=x\sqrt{y}-x^2+9x-y\ \ (y>0)$ $\quad$ ($(6,9)$ noktası yerel maks.)

b) $g(x,y)=(x-1)\ln(xy)$ $\quad$ ($(1,1)$ noktası bir semer noktası)

35. $f(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. ($(0,0)$ eyer noktası.)

36. $D=\{(x,y):x\in[0,3],y\in[0,3]\}$ ile tanımlanıyor. Her $(x,y)\in D$ için $\frac{x^2+y^2}{4}\leq e^{x+y-2}$ olduğunu gösteriniz. ($f(x,y)=\frac{(x^2+y^2)e^{-x-y+2}}{4}$ fonksiyonunun maksimum değeri bulunarak gösterilebilir.)

37. a)$f(x,y)=x^2y-6y^2-3x^2$ nin tüm kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

b)Kenarları koordinat eksenlerine paralel olan ve $36x^2+4y^2+9z^2=36$ elipsoidi içine yerleştirilebilen maksimum hacimli dikdörtgensel kutunun boyutlarını bulunuz ve maksimum hacmini bulunuz. $(\frac{16\sqrt{3}}{3})$

c)$f(x,y)=xy$ nin $x^2+y^2=1$ çemberi üzerindeki en büyük ve en küçük değerlerini bulmak için Lagrange çarpanları yöntemini kullanınız.

d)$f(x,y)=2xy+y^2+8x-4y$ fonksiyonunun $1\leq x\leq 2$ ile $-1\leq y\leq 1$ nin belirlediği R bölgesi üzerindeki en büyük ve en küçük değerini bulunuz.

38. Sınav notları $g(x,y,z)=10f(x,y,z)$ fonksiyonu ile hesaplansın. (x,y,z), $x^2+y^2+z^2=25$ şartını sağlamak üzere $f(x,y,z)=x^2+2z^2-(y-6)^2-16$ olarak tanımlı ise hangi (x,y,z) değerine karşı gelen notu almak istersin? ($(0,2,\sqrt{21})$ veya $(0,2,-\sqrt{21})\Longrightarrow g=100$)

39. $f(x,y)=-4x^3-xy^2+2x^2y+x$ fonksiyonunun maksimum, minimum ve eyer noktalarını bulunuz. ($(0,\pm 1)$ eyer noktası, $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ yerel maks. , $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ yerel min.)

40. Aşağıdaki fonksiyonların verilen bölgeler üzerindeki mutlak ekstremumlarını bulunuz.

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ $\quad (maks \to (\pm 2, 0), \min \to (0, \pm 2))$

b) $f(x,y) = 2xy + y^2 + 8x - 4y$, $R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ $\quad (maks \to (2,1) \to 17, \min \to (0,1) \to -3)$

41. $f(x,y) = 4x^3 + y^2 - 2x^2y + 102$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. ($(3,9)$ eyer noktası, $(0,0)$ eyer noktası)

42. $f(x,y,z) = xyz$ fonksiyonunun $x + 2y + z = 2$ şartı altındaki maksimum değeri nedir? ($x = z = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3} \Longrightarrow v = \frac{4}{27}$ maks.)

43. $f(x,y) = 16 - x^2 - 4y^2$ fonksiyonunun $x^4 + 2y^4 \leq 1$ bölgesindeki ekstremum değerlerini bulunuz. ($(0,0)$, $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}), (\pm 1, 0), (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}) \Longrightarrow maks. f(0,0) = 16, \min. f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}) = 13$)

44. $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. ($(0,0)$ eyer noktası, $(1,1), (1,-1)$ yerel maksimum)

45. $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ eğrisi (bir elips) üzerinde orijine en yakın ve en uzak noktaları bulunuz.

CEVAP: (2, 1) ve (-2, -1) orijine en yakın noktalar

(2, -4) ve (-2, 4) orijine en uzak noktalar

46. $f(x,y) = 2xy$ fonksiyonunun $D : x^2 + y^2 \leq 4$ kapalı diski üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

CEVAP: $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4$ maksimum, $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -4$ minimum

$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4$ maksimum, $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -4$ minimum

47. Yüzey alanı 600 cm^3 olan maksimum hacimli dikdörtgen biçimindeki bir kutunun boyutlarını bulunuz. (uzunluk 10 cm , . . . , maksimum hacim 1000 cm^3)

48. Lagrance çarpanları metodunu kullanarak, $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsi üzerinde , $P(-1,0)$ noktasına en uzak olan noktaları bulunuz.

($(\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ ve $(\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3})$)

49. Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen kısıtlanmış eğri üzerindeki ekstremumlarını bulunuz.

a) $f(x,y) = x^2 + 8y^2, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (maks değer 8 $\to (0,1)$ noktasında olur. min değer $\dfrac{8}{27} \to (\dfrac{4}{9}, \dfrac{1}{9})$ noktasında olur.)

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, x - 2y + 2z = 6$ (maks değer yok. min değer 4 $\to (\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3})$ noktasında olur.)

c) $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolü üzerinden $(0,4)$ noktasına olan en yakın noktanın koordinatlarını bulunuz. ($(\pm\sqrt{5}, 2)$ ve min uzaklık 3 dür.)

50. Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 dydx \quad (\frac{1}{40})$

b) $\displaystyle\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dxdy \quad (\ln\frac{25}{24})$

c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{-y}^{y+2} (x + 2y^2) dxdy \quad (36)$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dydx \quad (\frac{\pi}{6})$

e) $R = \{(x,y)\,; |x| + |y| \leq 1\} \Rightarrow \displaystyle\iint_R x^3y^5 dxdy = ? \quad (0)$

51. R $x - ekseni, x = 1$ doğrusu ve $y = x$ doğrusu ile sınırlı bölge olduğuna göre $\displaystyle\iint_R e^{-x^2} dA$ integralini hesaplayınız.

CEVAP: $\dfrac{e-1}{2e}$

52. R bölgesi $x-ekseni$, $x=1$ doğrusu ve $y=x^2$ parabolü ile sınırlıdır. $x+y-z=0$ düzleminin altında ve R bölgesinin üzerindeki hacmi bulunuz.

    CEVAP: $\dfrac{7}{20}$birim küp

53. $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ katı küresinden $x^2+y^2=ax(a\rangle 0)$ dairesel silindiri ile kesilen bölgenin hacmini bulunuz. (ipucu: kutupsal koordinatlar kullanınız.)

    CEVAP:$\dfrac{4}{3}a^2(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3})$ birim küp

54. a)R bölgesi ;$x=2, y=x$doğruları ve $xy=1$ hiperbolü ile sınırlı bölge ise $\displaystyle\iint\limits_R \frac{x^2}{y^2}dA$ integralini hesaplayınız. $(\dfrac{-9}{4})$

    b)R bölgesi ; $y=x^2$ ve $x=y^2$ eğrileri ile sınırlı bölge ise $\displaystyle\iint\limits_R (x^2+y)dA=?$ $(\dfrac{33}{140})$

    c)R bölgesi; koordinat eksenleri ve $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ parabolü ile sınırlı bölge ise $\displaystyle\iint\limits_R xydA=?$ $(\dfrac{1}{280})$

    d)R bölgesi; $x$ekseni ve $0 \leq x \leq \pi$ olmak üzere $y=\sin x$ eğrisi ile sınırlı bölge ise $\displaystyle\iint\limits_R xdA=?$ (π)

    e)R bölgesi; köşeleri $(0,0),(1,1)$ ve $(-2,1)$ olan üçgen bölgesi ise $\displaystyle\iint\limits_R (1-x)dA=?$ (2)

55. Aşağıdaki integrallerin sırasını değiştiriniz.

    a)$\displaystyle\int_0^1\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dxdy$

    b)$\displaystyle\int_1^2\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

    c)$\displaystyle\int_1^e\int_0^{\ln x} f(x,y)dydx$

    d)$\displaystyle\int_0^1\int_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y)dydx+\int_1^3\int_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y)dydx$

56. Kutupsal koordinatları kullanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

    a)$\displaystyle\iint\limits_R (x^2+y^2)dA; R=\left\{(x,y)\,;x^2+(y+2)^2 \leq 4\right\}$ (24π)

    b)$\displaystyle\iint\limits_R \arctan\frac{y}{x}dA; R=\left\{(x,y)\,;x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$ $(\dfrac{\pi^2}{16})$

    c)$\displaystyle\iint\limits_R \sin(x^2+y^2)dA; R=\left\{(x,y)\,;\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\right\}$ $(-6\pi^2)$

57. $I=\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}dydx$ tekrarlı integralinin sırasını değiştirerek hesap ediniz.

    CEVAP:$\dfrac{e-1}{3}$

58. Aşağıdaki bölgelerin alanlarını çift katlı integral kullanarak hesaplayınız.

    a)Alttan R bölgesi ($R: y=x^2$ ve $y=1$ ile sınırlı)nin ve üstten $z=4-x-y$ eğrisinin sınırladığı cismin hacmini bulunuz. $(\dfrac{68}{15})$

    b)R bölgesi $xy=1, y=x$ ve $x=e$ doğrularının sınırladığı sınırlı bölge $(\frac{3}{2})$

    c)R bölgesi;$x=y^2$ ve $x=4-3y^2$ eğrilerinin sınırladığı bölge $(\frac{16}{3})$

    d)$x^2+2y^2=1$ ve $2x^2+y^2=1$ elipslerinin sınırladığı bölge $(\sqrt{2}\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3})$

    e)$x^2+y^2=4$ ve $y^2-2x^2=1$ eğrilerinin sınırladığı bölge $(\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}))$

59. R düzlemin birinci bölgesinde $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $\dfrac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x$ eşitsizlikleri ile tanımlanıyor.

$I = \displaystyle\iint_R \arctan(\frac{y}{x})dxdy$ iki katlı integralini karteziyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara dönüştürerek hesap ediniz.

CEVAP:$I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \theta r dr d\theta = \frac{\pi^2}{16}$

60. Kutupsal koordinatlar kullanarak $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin üstünde ve $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresinin altında kalan cismin hacmini bulunuz.

CEVAP:$\dfrac{2\pi}{3}(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}})$birim küp

61. İki katlı integral kullanarak aşağıda verilen cisimlerin hacimlerini bulunuz.

a)S cismi ;koordinat düzlemleri, $x = 1$ ve $y = 2$ düzlemleri ile $z = x + 2y + 1$ düzleminin sınırladığı cisim, (7)

b)Koordinat düzlemleri ile $x + 2y = 2$ ve $x + 4y + 2z = 8$ düzlemlerinin 1. kuadrantta sınırladığı cisim, ($\frac{23}{3}$)

c)$x = 0, z = 0, x + 3y = 6, 2x + 3y = 12$ ve $x + y + z = 6$ düzleminin sınırladığı cisim, (12)

d)$x^2 + y^2 = 1$ dik silindiri ile $z = 0$ ve $2x + 2y + 3z = 6$ düzleminin sınırladığı cisim, ($\frac{1}{3}$)

62. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dydx$ tekrarlı integrali bir D bölgesi üzerinde iki katlı integrale karşılık gelmektedir. D bölgesini çizdikten sonra integralin sırasını değiştirin ve integrali hesaplayın.

CEVAP:2

63. $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{4 + x^5}} dxdy = ?$ ($dydx$ e çevrilirse sonuç $\frac{4}{5}$ bulunur.)

64. $R = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x \geq 0\}$ olmak üzere $\displaystyle\iint_R (1 + x^2 + y^2)dxdy = ?$ ($(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \Longrightarrow$ sonuç $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{16}$)

65. ($R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 2x\}$) veya ($x^2 + y^2 = 1$ çemberi içerisinde ve $y = 2x$ doğrusu altında kalan) bölge olmak üzere

$$\iint_R 2e^{-\frac{3}{5}x^3 + x} y dA = ?$$

$(e^{-\frac{2}{3\sqrt{5}}} - e^{-\frac{2}{9\sqrt{5}}})$

66. $C_1 : (x - 1)^2 + y^2 = 1$ ve $C_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 1$ olarak tanımlanıyor. R, C_2 nin içinde ve C_1 in dışındaki noktaların kümesi olmak üzere

$\displaystyle\iint_R y^2 dA$ integralini

a) $dxdy$ in integrali olarak

b) $dydx$ in integrali olarak

c) kutupsal koordinatlarda integral olarak ifade ediniz.

(Cevap:

a) $2\left[\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{1-y^2}} y^2 dxdy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \int_{2-\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{1-y^2}} y^2 dxdy\right]$

b) $2\left[\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2} \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} y^2 dydx + \int_2^3 \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} y^2 dydx\right]$

c) $2\left[\displaystyle\int_0^{\pi/6} \int_{2\cos\theta}^{2\cos\theta + \sqrt{4\cos^2\theta - 3}} r^2 \sin^2\theta r dr d\theta\right]$)

67. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\ln y} f(x, y)dxdy + \int_{2\pi}^{\infty} \int_{\ln(y-2\pi)}^{\ln y} f(x, y)dxdy$ değerini bulunuz. ($f(x, y) = \frac{1+\sin(x^2+y)}{1+x^2}$) (Cevap: $2\pi^2$)

68. Aşağıdaki üç katlı integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dzdydx$ (18)

b) $\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 x \cos y \sin z dxdydz$ (3)

c) $\int_1^2 \int_0^{\ln z} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dxdydz$ $(2\ln 2 - \frac{7}{4})$

d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} dydx$ $(\frac{\pi^2}{8})$

e) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^{x+z} x^2yz^2 dydxdz$ (0)

f) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3dz\ r\ drd\theta$ $(\pi(6\sqrt{2}-8))$

g) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta/2\pi} \int_0^{3+24r^2} dz\ r\ drd\theta$ $(\frac{17\pi}{5})$

69. $z = 8 - x^2 - y^2$ ve $z = x^2 + y^2$ paraboloidleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini katlı integral ile hesaplayınız. (16π)