MAT 102-MATEMATİK 2 (2013-2014 BAHAR DÖNEMİ)
ÇALIŞMA SORULARI

1. Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık kümelerini ve yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz. Mutlak yakınsak ve şartlı yakınsak olduğu noktaları ayrıca belirtiniz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n!}$ $((-\infty,\infty),\ R=\infty)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ $([-1,1),\ R=1)$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$ $([-1,1],\ R=1)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right)x^n$ $(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\ R=\frac{1}{2})$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)}(x+5)^n$ $([-6,4],\ R=5)$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} 10^n\left(\frac{x-1}{5}\right)^n$ $(\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right), R=\frac{1}{2})$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n!}$ $([3,5], R=1)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}x^{4n}$ $((-1,1), R=1)$

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+2+\cdots+2^n)\,x^n$ $(\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), R=\frac{1}{2})$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{3^{n^2}}$ $([-2,0), R=1)$

2. Aşağıdaki fonksiyonların Maclaurin Serileri'ni bulunuz.

a) $\frac{x}{2x+1}$ $(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^{n+1})$

b) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ $(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n-1})$

c) $\frac{x^2}{1-x^3}$ $(\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n+2})$

d) $\frac{1}{x^2-3x+2}$ $(\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n)$

e) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)})$

f) $\frac{1-x}{1+x^2}(=1-x-x^2+x^3+x^4-x^5-x^6+\cdots)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}x^n$, $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$: tam değer fonksiyonu

g) $f(x)=\ln x$ in $x=1$ deki Taylor serilerini bulunuz. $(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n})$

h) $f(x)=\sin x$ in $x=\frac{\pi}{2}$ deki Taylor serisini bulunuz.
$(\sin x = 1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4-\frac{1}{6!}(x-\frac{\pi}{2})^6+\cdots)$

i) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ nin $x=1$ deki Taylor serilerini bulunuz.
$(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n)$

j) $f(x)=e^x$ in $x=2$ deki Taylor serisini bulunuz. $(e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!})$

3. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulup ilgili uzayda gösteriniz.

a) $z = f(x,y) = \ln(xy) \quad (\{(x,y) \mid xy > 0\})$

b) $z = f(x,y) = y + \arccos x \quad (\{(x,y) \mid -1 \le x \le 1\})$

c) $z = f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2} \quad (\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 16\})$

4. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $z = 1 - x^2 - y^2$

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

5. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen düzey eğrilerini çiziniz.

a) $f(x,y) = 1 - |x| - |y| \quad ,c = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$

b) $f(x,y) = xy, c = 0 \quad ,c = \pm 1, \pm 2$

c) $f(x,y) = y - \cos x \quad ,c = \pm 1, \pm 2, 0$

6. Aşağıdaki limitleri (varsa) bulunuz.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^4} \quad$ (yok)

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x} \quad (0)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,\frac{1}{4})} x^2 \tan(xy) \quad (\pi^2)$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} \quad (\frac{1}{2})$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad$ (yok)

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 (y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} \quad (0)$

7. Aşağıdaki fonksiyonların sürekli oldukları kümeleri bulunuz.

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2} \quad \left(S_f = \left\{(x,y) \mid x^2 - y^2 \neq 0\right\}\right)$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2 - 1} \quad \left(S_f = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \neq 1\right\}\right)$

c) $f(x,y,z) = x \ln(yz) \quad (S_f = \{(x,y,z) \mid yz > 0\})$

8. Aşağıdaki fonksiyonların kısmi türevlerini bulunuz.

a) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

b) $f(x,y,z) = e^{\frac{xy}{z}}$

c) $f(x,y) = \cos \dfrac{x}{y} \sin \dfrac{y}{x}$

9. a) $u = \sin(xy) + \cos(xz) + \tan(yz) \Longrightarrow \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = ?$

b) $z = f(x,y) = \sin^2(3x - 4) \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ?, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ?$

10. a) $z = txy^2, x = t + \ln(y + t^2)$ ve $y = e^t \Longrightarrow \dfrac{dz}{dt} = ?$

b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2); x = tu, y = \dfrac{t}{u} \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial t} = ?, \dfrac{\partial f}{\partial u} = ?$

11. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4y^2}{x - 2y} & x \neq 2y \\ g(x) & x = 2y \end{cases}$ fonksiyonu R^2 de sürekli ise $g(x)$ ne olmalıdır.

12. $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu için $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ olduğunu gösteriniz ve nedenlerini araştırınız.

13. $F(x,y,z) = x^3e^{y+z} - y\sin(x-z) = 0$ ise $\dfrac{\partial z}{\partial x} =?$

14. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ da türevlenebildiğini gösteriniz.

15. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+4y^3} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ olarak tanımlanıyor. $f_x(0,0) =?$ $f_y(0,0) =?$.

16. Aşağıdaki limitleri bulunuz, limit yoksa olmadığını gösteriniz.

    a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

    b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{e^{-x^2}-y}{x^2+y^2}$

17. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ olsun,

    a) f, $(0,0)$ noktasında sürekli mi?

    b) $f_x(x,y) =?, f_y(x,y) =?$

    c) $f_{yx}(0,0) =?$

18. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ olsun,

    a) f, $(0,0)$ noktasında sürekli mi?

    b) $f_x(0,0)$ değeri var mı?

    c) $f_{xx}(0,0)$ değeri var mı?

19. $z = f(xy, e^xy)$ olsun

    a) $z_x =?, z_y =?$

    b) $f_1(0,0) = 1, f_2(0,0) = 1$ olmak üzere $z = f(xy, e^xy)$ grafiğinin $(0,0)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

    c) $x-$ekseniyle b şıkkında verilen düzlem arasındaki uzaklığı bulunuz.

20. $w(x,y) = f(x^2+y^2, xy, 2x)$ ve f, 2. dereceden sürekli kısmi türevlere sahip olmak üzere $w_{yx}(x,y) =?$

21. a) $e^{0.1}\ln(0.8)$ in yaklaşık değerini $f(x,y) = e^x \ln y$ fonksiyonunu kullanarak bulunuz.

    b) $f(x,y) = e^x \ln y$ fonksiyonu $(0,1)$ noktasında hangi doğrultuda en hızlı artar?Ve bu doğrultudaki artış oranı nedir?

    c) $\overrightarrow{u} = i + j$ olmak üzere $D_u f(0,1) =?$

22. $f(x,y)$ fonksiyonu $P_0 = (x_0, y_0)$ noktasında 1. dereceden kısmi türevlere sahip olsun. $\overrightarrow{v} = i + j$ olmak üzere $D_v f(P_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ve f nin P_0 noktasında maksimum değişim oranı 1 olsun. $f_x(P_0)$ ın bütün olası değerlerini bulunuz.

23. $z = f(x,y)$ fonksiyonu kapalı olarak $x^2 + yz - \ln(xz) = 1$ şeklinde tanımlanmış olsun.

    a) $z = f(x,y)$ fonksiyonunun grafiğinin $(x,y,z) = (1,0,1)$ noktasındaki normal doğrusunu bulunuz.

    b) a şıkkında verilen doğru $x + y + z = 0$ düzlemiyle kesişir mi?Kesişiyorsa hangi noktada kesişir?

24. $z^2 + 100 = 2x^2 + 2y^2$ yüzeyinde bulunan, $x + y = 1$ düzlemine paralel olan teğet düzlemlerine sahip bütün noktaları bulunuz.

25. $z = f(x,y)$ fonksiyonu kapalı olarak $xz^3 + y^3 + x^3 + z = 4$ şeklinde verilmiş olsun.

    a) $(0,1)$ noktasında z_x ve z_y yi bulunuz.

    b) $f(0.01, 0.99)$ nın yaklaşık değerini teğet düzlemi(lineer) yakınsamasıyla bulunuz.

26. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ yüzeyine (elipsoid) $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ noktasındaki teğet düzleminin ve normal doğrusunun denklemlerini yazınız.

CEVAP:$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}+\dfrac{z_0z}{c^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}$ (teğet düzlemi)

$\dfrac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\dfrac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}$ (normal doğrusu)

27. $z=f(x,y)=xy$ yüzeyine $P_0=(2,-2,-4)$ noktasındaki teğet düzlemi ve normal doğrusunun denklemlerini yazınız.

CEVAP:$2x-2y+z-4=0$ (teğet düzlemi) $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+4}{-1}$ (normal doğrusu)

28. a) $z=\sin(xy)$ fonksiyonunun grafiğinin $(\frac{\pi}{3},-1)$ noktasındaki teğet düzlem denklemini ve normal doğrusunun denklemini yazınız.

b) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ fonksiyonunun $P_0=(1,2,3)$ noktasındaki ve $\overrightarrow{v}=-2i+j-2k$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulunuz. (4)

29. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonu verilsin buna göre

a) $\nabla f(0,0)=?$

b) $\overrightarrow{u}=i+j$ vektörü için $D_uf(0,0)=?$

c) $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ da türevlenebilir midir? Neden?

30. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ da sürekli ve kısmi türevlere sahip olduğunu gösteriniz.

31. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $P_0=(3,4)$ noktasındaki $L(x,y)$ lineerleştirmesini yazınız ve bundan faydalanarak $\sqrt{(2.98)^2+(4.03)^2}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

CEVAP:5. 012

32. Teğet düzlemi yaklaşımını (doğrusal yaklaşım) kullanarak $e^{0.1}\ln(0.9)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız. (-0.1)

33. $z=f(x,y)$ fonksiyonu için $f(1,2)=3, f_x(1,2)=2$ ve $f_y(1,2)=5$ olduğu biliniyor. $f(1.1,1.8)$ in değerini yaklaşık olarak bulunuz. $(f(1.1,1.8)\approx 2.2)$

34. $f(x,y,z)=\dfrac{xy^2}{1+z^2}$ ise, $f(1.01,1.98,2.03)$ ün yaklaşık değerini bulunuz. (0. 7728)

35. Aşağıdakilerin yaklaşık değerlerini bulunuz.

a) $\sin(31^\circ)\cdot\cos(58^\circ)$

b) $(1.002)(2.003)^2(3.004)^3$

36. $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ eşitliği veriliyor. Başlangıç durumunda $x=100$ ve $y=25$ dır. x 30 artar ve y, 5 azalırsa z de nasıl bir değişiklik olur. (Diferansiyel yardımıyla çözebilirsiniz) $(\dfrac{1}{z^2}dz=\dfrac{1}{x^2}dx+\dfrac{1}{y^2}dy\Longrightarrow\cdots\Rightarrow dz=-2)$

37. $f(x,y)=3x^2y+y^3-108y$ fonksiyonunun maksimum, minimum ve eyer noktalarını bulunuz. $((\pm6,0)$ eyer noktası, $(0,6)$ yerel min. , $(0,-6)$ yerel maks.)

38. $f(x,y)=xy(3-x-y)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve bu kritik noktalarda yerel maksimum ve minimum değerleri alıp almadığını belirleyiniz.

CEVAP:Kritik noktalar (0, 0), (3, 0), (0, 3) ve (1, 1). (0, 0), (3, 0) ve (0, 3) noktaları eyer(semer) noktaları. $f(1,1)=1$ yerel maksimum değeri.

39. Aşağıdaki fonksiyonların tüm kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

a) $f(x,y)=x\sqrt{y}-x^2+9x-y\ \ (y>0)$ $((6,9)$ noktası yerel maks.)

b) $g(x,y)=(x-1)\ln(xy)$ $((1,1)$ noktası bir semer noktası)

40. $f(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. $((0,0)$ eyer noktası.)

41. $D = \{(x, y) : x \in [0, 3], y \in [0, 3]\}$ ile tanımlanıyor. Her $(x, y) \in D$ için $\frac{x^2+y^2}{4} \leq e^{x+y-2}$ olduğunu gösteriniz. ($f(x, y) = \frac{(x^2+y^2)e^{-x-y+2}}{4}$ fonksiyonunun maksimum değeri bulunarak gösterilebilir.)

42. a)$f(x, y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$ nin tüm kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

b)Kenarları koordinat eksenlerine paralel olan ve $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$ elipsoidi içine yerleştirilebilen maksimum hacimli dikdörtgensel kutunun boyutlarını bulunuz ve maksimum hacmini bulunuz. ($\frac{16\sqrt{3}}{3}$)

c)$f(x, y) = xy$ nin $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki en büyük ve en küçük değerlerini bulmak için Lagrange çarpanları yöntemini kullanınız.

d)$f(x, y) = 2xy + y^2 + 8x - 4y$ fonksiyonunun $1 \leq x \leq 2$ ile $-1 \leq y \leq 1$ nin belirlediği R bölgesi üzerindeki en büyük ve en küçük değerini bulunuz.

43. Sınav notları $g(x, y, z) = 10f(x, y, z)$ fonksiyonu ile hesaplansın. (x, y, z), $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ şartını sağlamak üzere $f(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - (y - 6)^2 - 16$ olarak tanımlı ise hangi (x, y, z) değerine karşı gelen notu almak istersin? ($(0, 2, \sqrt{21})$ veya $(0, 2, -\sqrt{21}) \Longrightarrow g = 100$)

44. $f(x, y) = -4x^3 - xy^2 + 2x^2y + x$ fonksiyonunun maksimum, minimum ve eyer noktalarını bulunuz. ($(0, \pm 1)$ eyer noktası, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ yerel maks. , $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ yerel min.)

45. Aşağıdaki fonksiyonların verilen bölgeler üzerindeki mutlak ekstremumlarını bulunuz.

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ $\quad$ ($maks \to (\pm 2, 0), \min \to (0, \pm 2)$)

b) $f(x, y) = 2xy + y^2 + 8x - 4y$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ $\quad$ ($maks \to (2, 1) \to 17, \min \to (0, 1) \to -3$)

46. $f(x, y) = 4x^3 + y^2 - 2x^2y + 102$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. ($(3, 9)$ eyer noktası, $(0, 0)$ eyer noktası)

47. $f(x, y, z) = xyz$ fonksiyonunun $x + 2y + z = 2$ şartı altındaki maksimum değeri nedir? ($x = z = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3} \Longrightarrow v = \frac{4}{27}$ maks.)

48. $f(x, y) = 16 - x^2 - 4y^2$ fonksiyonunun $x^4 + 2y^4 \leq 1$ bölgesindeki ekstremum değerlerini bulunuz. ($(0, 0)$, $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}), (\pm 1, 0), (\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}) \Longrightarrow maks.f(0, 0) = 16, \min.f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}) = 13$)

49. $f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. ($(0, 0)$ eyer noktası, $(1, 1), (1, -1)$ yerel maksimum)

50. $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ eğrisi (bir elips) üzerinde orijine en yakın ve en uzak noktaları bulunuz.

CEVAP: (2, 1) ve (-2, -1) orijine en yakın noktalar

(2, -4) ve (-2, 4) orijine en uzak noktalar

51. $f(x, y) = 2xy$ fonksiyonunun $D : x^2 + y^2 \leq 4$ kapalı diski üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

CEVAP:$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4$ maksimum, $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -4$ minimum

$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4$ maksimum, $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -4$ minimum

52. Yüzey alanı 600 cm^3 olan maksimum hacimli dikdörtgen biçimindeki bir kutunun boyutlarını bulunuz. (uzunluk 10 cm , . . . , maksimum hacim 1000 cm^3)

53. Lagrance çarpanları metodunu kullanarak, $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsi üzerinde , $P(-1, 0)$ noktasına en uzak olan noktaları bulunuz.

($(\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ ve $(\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3})$)

54. Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen kısıtlanmış eğri üzerindeki ekstremumlarını bulunuz.

a) $f(x, y) = x^2 + 8y^2, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ $\quad$ (maks değer 8 $\to (0, 1)$ noktasında olur. min değer $\dfrac{8}{27} \to (\dfrac{4}{9}, \dfrac{1}{9})$ noktasında olur.)

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, x - 2y + 2z = 6$ $\quad$ (maks değer yok. min değer 4 $\to (\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3})$ noktasında olur.)

c) $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolü üzerinden $(0, 4)$ noktasına olan en yakın noktanın koordinatlarını bulunuz. ($(\pm\sqrt{5}, 2)$ ve min uzaklık 3 dür.)

55. Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 dydx \quad (\frac{1}{40})$

b) $\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dxdy \quad (\ln \frac{25}{24})$

c) $\int_{-1}^2 \int_{-y}^{y+2} (x+2y^2) dxdy \quad (36)$

d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dydx \quad (\frac{\pi}{6})$

e) $R = \{(x,y)\,;|x|+|y| \le 1\} \Rightarrow \iint\limits_R x^3y^5 dxdy =? \quad (0)$

56. $R \quad x-ekseni, x=1$ doğrusu ve $y=x$ doğrusu ile sınırlı bölge olduğuna göre $\iint\limits_R e^{-x^2} dA$ integralini hesaplayınız.

CEVAP: $\frac{e-1}{2e}$

57. R bölgesi $x-ekseni$, $x=1$ doğrusu ve $y=x^2$ parabolü ile sınırlıdır. $x+y-z=0$ düzleminin altında ve R bölgesinin üzerindeki hacmi bulunuz.

CEVAP: $\frac{7}{20}$birim küp

58. $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ katı küresinden $x^2+y^2 = ax(a\rangle 0)$ dairesel silindiri ile kesilen bölgenin hacmini bulunuz. (ipucu: kutupsal koordinatlar kullanınız.)

CEVAP: $\frac{4}{3}a^2(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$ birim küp

59. a) R bölgesi ;$x=2, y=x$doğruları ve $xy=1$ hiperbolü ile sınırlı bölge ise $\iint\limits_R \frac{x^2}{y^2} dA$ integralini hesaplayınız. $(\frac{-9}{4})$

b) R bölgesi ; $y=x^2$ ve $x=y^2$ eğrileri ile sınırlı bölge ise $\iint\limits_R (x^2+y) dA =? \quad (\frac{33}{140})$

c) R bölgesi; koordinat eksenleri ve $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ parabolü ile sınırlı bölge ise $\iint\limits_R xydA =? \quad (\frac{1}{280})$

d) R bölgesi; $x$ekseni ve $0 \le x \le \pi$ olmak üzere $y=\sin x$ eğrisi ile sınırlı bölge ise $\iint\limits_R xdA =? \quad (\pi)$

e) R bölgesi; köşeleri $(0,0),(1,1)$ ve $(-2,1)$ olan üçgen bölgesi ise $\iint\limits_R (1-x) dA =? \ (2)$

60. Aşağıdaki integrallerin sırasını değiştiriniz.

a) $\int_0^1 \int_{-2y}^{2y} f(x,y) dxdy$

b) $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dydx$

c) $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y) dydx$

d) $\int_0^1 \int_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y) dydx + \int_1^3 \int_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y) dydx$

61. Kutupsal koordinatları kullanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\iint\limits_R (x^2+y^2) dA; R = \left\{(x,y)\,; x^2+(y+2)^2 \le 4\right\} \quad (24\pi)$

b) $\iint\limits_R \arctan \frac{y}{x} dA; R = \left\{(x,y)\,; x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\right\} \quad (\frac{\pi^2}{16})$

c) $\iint\limits_R \sin(x^2+y^2)dA; R=\left\{(x,y)\,;\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\right\}$ $(-6\pi^2)$

62. $I=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}dydx$ tekrarlı integralinin sırasını değiştirerek hesap ediniz.

CEVAP:$\dfrac{e-1}{3}$

63. Aşağıdaki bölgelerin alanlarını çift katlı integral kullanarak hesaplayınız.

a)Alttan R bölgesi ($R: y=x^2$ ve $y=1$ ile sınırlı)nin ve üstten $z=4-x-y$ eğrisinin sınırladığı cismin hacmini bulunuz. $(\dfrac{68}{15})$

b)R bölgesi $xy=1, y=x$ ve $x=e$ doğrularının sınırladığı sınırlı bölge $(\frac{3}{2})$

c)R bölgesi;$x=y^2$ ve $x=4-3y^2$ eğrilerinin sınırladığı bölge $(\frac{16}{3})$

d)$x^2+2y^2=1$ ve $2x^2+y^2=1$ elipslerinin sınırladığı bölge $(\sqrt{2}\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{3})$

e)$x^2+y^2=4$ ve $y^2-2x^2=1$ eğrilerinin sınırladığı bölge $(\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}))$

64. R düzlemin birinci bölgesinde $1\le x^2+y^2\le 4, \dfrac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x$ eşitsizlikleri ile tanımlanıyor.

$I=\iint\limits_R \arctan(\dfrac{y}{x})dxdy$ iki katlı integralini karteziyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara dönüştürerek hesap ediniz.

CEVAP:$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2 \theta r dr d\theta=\dfrac{\pi^2}{16}$

65. Kutupsal koordinatlar kullanarak $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisinin üstünde ve $x^2+y^2+z^2=1$ küresinin altında kalan cismin hacmini bulunuz.

CEVAP:$\dfrac{2\pi}{3}(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$birim küp

66. İki katlı integral kullanarak aşağıda verilen cisimlerin hacimlerini bulunuz.

a)S cismi ;koordinat düzlemleri, $x=1$ ve $y=2$ düzlemleri ile $z=x+2y+1$ düzleminin sınırladığı cisim, (7)

b)Koordinat düzlemleri ile $x+2y=2$ ve $x+4y+2z=8$ düzlemlerinin 1. kuadrantta sınırladığı cisim, $(\frac{23}{3})$

c)$x=0, z=0, x+3y=6, 2x+3y=12$ ve $x+y+z=6$ düzleminin sınırladığı cisim, (12)

d)$x^2+y^2=1$ dik silindiri ile $z=0$ ve $2x+2y+3z=6$ düzleminin sınırladığı cisim, $(\frac{1}{3})$

67. $I=\int_0^\pi\int_x^\pi \dfrac{\sin y}{y}dydx$ tekrarlı integrali bir D bölgesi üzerinde iki katlı integrale karşılık gelmektedir. D bölgesini çizdikten sonra integralin sırasını değiştirin ve integrali hesaplayın.

CEVAP:2

68. $\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 \dfrac{y}{\sqrt{4+x^5}}dxdy=?$ ($dydx$ e çevrilirse sonuç $\frac{4}{5}$ bulunur.)

69. $R=\{(x,y):(x^2+y^2)^2\le x^2-y^2, x\ge 0\}$ olmak üzere $\iint\limits_R(1+x^2+y^2)dxdy=?$ ($(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)\Longrightarrow$ sonuç $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{16}$)

70. ($R=\{(x,y):x^2+y^2\le 1, y\le 2x\}$) veya ($x^2+y^2=1$ çemberi içerisinde ve $y=2x$ doğrusu altında kalan) bölge olmak üzere

$$\iint\limits_R 2e^{-\frac{3}{5}x^3+x}ydA=?$$

$(e^{-\frac{2}{3\sqrt{5}}}-e^{-\frac{2}{9\sqrt{5}}})$

71. $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$ ve $C_2 : (x-2)^2 + y^2 = 1$ olarak tanımlanıyor. R, C_2 nin içinde ve C_1 in dışındaki noktaların kümesi olmak üzere

$\iint\limits_R y^2 dA$ integralini

a) $dxdy$ in integrali olarak

b) $dydx$ in integrali olarak

c) kutupsal koordinatlarda integral olarak ifade ediniz.

(Cevap:

a) $2\left[\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{1-y^2}} y^2 dxdy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \int_{2-\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{1-y^2}} y^2 dxdy\right]$

b) $2\left[\int_{\frac{3}{2}}^{2} \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} y^2 dydx + \int_2^3 \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} y^2 dydx\right]$

c) $2\left[\int_0^{\pi/6} \int_{2\cos\theta}^{2\cos\theta+\sqrt{4\cos^2\theta-3}} r^2 \sin^2\theta r dr d\theta\right]$)

72. $\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\ln y} f(x,y)dxdy + \int_{2\pi}^{\infty} \int_{\ln(y-2\pi)}^{\ln y} f(x,y)dxdy$ değerini bulunuz. ($f(x,y) = \frac{1+\sin(x^2+y)}{1+x^2}$) (Cevap: $2\pi^2$)

73. Aşağıdaki üç katlı integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dzdydx$ (18)

b) $\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 x\cos y \sin z dxdydz$ (3)

c) $\int_1^2 \int_0^{\ln z} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dxdydz$ $(2\ln 2 - \frac{7}{4})$

d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} dydx$ $(\frac{\pi^2}{8})$

e) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^{x+z} x^2yz^2 dydxdz$ (0)

f) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3dz\ r\ drd\theta$ $(\pi(6\sqrt{2}-8))$

g) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta/2\pi} \int_0^{3+24r^2} dz\ r\ drd\theta$ $(\frac{17\pi}{5})$

74. $z = 8 - x^2 - y^2$ ve $z = x^2 + y^2$ paraboloidleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini üç katlı integral ile hesaplayınız. (16π)