

MAT 102-MATEMATİK 2 (2015-2015 YAZ DÖNEMİ)
ÇALIŞMA SORULARI

- Tabanı $2a$ büyük eksenli, $2b$ küçük eksenli elips ile sınırlanan ve büyük eksene dik her kesiti kare olan cismin hacmini bulunuz. Cevap : $\frac{16ab^2}{3}$
- $y = x$ ve $y = x^2$ eğrileri ile sınırlı R bölgesi $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini dilimleme yöntemi (pul metodu) ile bulunuz. Cevap : $\frac{\pi}{2}$
- $y = 2x^2 - x^3$ ve $y = 0$ ile sınırlı bölge y -ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz. Cevap : $\frac{16\pi}{5}$
- $y = x - x^2$ ve $y = 0$ ile sınırlı bölge $x = 2$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini silindirik kabuk yöntemi ile bulunuz. Cevap : $\frac{\pi}{2}$
- $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$ eğrisinin $x = 1$ 'den $x = 2$ 'ye kadar uzunluğunu bulunuz. Cevap : $15 + \frac{3}{128}$
- $y = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ eğrisi x -ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel yüzeyin (kürenin bir parçası) alanını bulunuz. Cevap : π
- $x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$, $0 \leq y \leq \ln 2$ eğrisi y -ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz. Cevap : $\pi(\frac{15}{16} + \ln 2)$
- $y = x^2$, $x = 1$ ve $y = 4$ ile sınırlı bölgenin ($x \cdot y \geq 0$, I. bölge)
 - x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini dilimleme yöntemi ile bulunuz.

C: $v = \int_1^2 \pi(4^2 - x^4)dx = \dots = \frac{129}{5}\pi$

 - y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini kabuk yöntemi ile bulunuz.

C: $v = \int_1^2 2\pi x(4 - x^2)dx$
- $y = 2x - x^2$ eğrisinin $x = 0$ ile $x = 2$ arasında kalan parçasının y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını integral ile ifade ediniz. (NOT: İntegrali hesaplayınız.)

C: Y.A. = $\int_0^2 2\pi x \sqrt{1 + (2 - 2x)^2} dx$

- $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ eğrisinin $x = 1$ ile $x = 4$ arasında kalan parçasının uzunluğu nedir?

C: $\frac{53}{6}$ (L = $\int_1^3 (x^2 + \frac{1}{4x^2}) dx$

- $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = ?$ C: $-\cot x + \csc x + c$ veya $\tan(\frac{x}{2}) + c$
- $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9 - x^2}} dx = ?$ C: $\frac{-1}{9} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} + c$
- $\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^3 + 2x^2} dx = ?$ C: $\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - \frac{\ln|x|}{4} - \frac{1}{2x} - \frac{23}{4} \ln|x + 2| + c$
- $y = x^2 + 3$, $y = 1$, $x = 0$ ve $x = 2$ ile sınırlı bölge (NOT: İntegralleri hesaplamayınız.)

 - alanını integral ile ifade ediniz. C: $\int_0^2 (x^2 + 3 - 1) dx$
 - çevre uzunluğunu integral ile ifade ediniz. C: Çevre = $L + 2 + 2 + 6$, $L = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$
 - x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini integral ile ifade ediniz.

C: $V = \int_0^2 \pi [(x^2 + 3)^2 - 1^2] dx$

 - y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini integral ile ifade ediniz.

C: $V = \int_0^2 \pi(x^2 + 2)2x dx$

15. $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx = ?$ C: $\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$

16. Düzlemde $y = x^2$ ile $y = x$ in sınırladığı bölgenin
 a) x - ekseni b) y - ekseni c) $y = 2$ doğrusu
 etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

17. Düzlemde $x = y^2$ ile $y = x^3$ eğrilerinin düzlemde sınırladığı bölgenin
 a) x - ekseni b) y - ekseni c) $x = -1$ doğrusu
 etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

18. a) $x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4y}$, $1 \leq y \leq 3$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.
 b) $y = \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.
 c) $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t dt}$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

19. $y = \frac{1}{x}$ eğrisi, x -ekseni ile $x = 1$ doğrusunun sağında belirlenen bölgenin
 a) alanını b) x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini c) y -ekseni etrafında döndürülmesiyle
 oluşan dönel cismin hacmini (varsıa) bulunuz.

20. $\sum_{k=1}^n 6k^2 - 4k + 3 = ?$

21. $\sum_{k=1}^7 k(2k+1) = ?$

22. Aşağıdaki genelleştirilmiş (has olmayan) integralleri hesaplayınız:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2} dx$, (b) $\int_0^1 x \ln x dx$, (c) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$, (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$

Cevaplar: (a) 0 , (b) $-\frac{1}{4}$, (c) 4 , (d) iraksak

23. Aşağıdaki has olmayan integrallerin yakınsak veya iraksaklıklarını belirleyiniz:

(a) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$, (b) $\int_0^1 \frac{dt}{t - \sin t}$, (c) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} dx$, (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

Cevaplar: (a) yakınsak , (b) iraksak , (c) yakınsak , (d) yakınsak

24. Aşağıdaki has olmayan integrallerin yakınsak veya iraksaklıklarını belirleyiniz:

a) $\int_0^{\infty} xe^{-2x} dx$	b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sec x dx$	c) $\int_0^3 \frac{dx}{x-2}$	d) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-1}}$
e) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	f) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$	g) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$	h) $\int_0^1 e^{-\frac{1}{2} \ln x} dx$
i) $\int_{-\infty}^2 \frac{4x^2 - 3}{5\sqrt{x}} dx$	j) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x \ln x}$	k) $\int_2^{\infty} \frac{6\sqrt{3x^4-x}}{\sqrt{x^3-1}} dx$	l) $\int_1^{\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) dx$
m) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \ln^2 x}$	n) $\int_0^1 x^2 (\ln x)^3 dx$	o) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^p}$	hangi p ler için yakınsaktır?

25. $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$ yakınsak? iraksak? (Cevap: Yakınsak)

26. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}}$ yakınsak? iraksak? (Cevap: Yakınsak)

27. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ yakınsak? iraksak? (Cevap: Yakınsak)

28. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{1+x^2}$ yakınsak? Iraksak? (Cevap: Iraksak)

29. $\int_0^1 \ln x dx$ iraksak? yakınsak? (Cevap: Yakınsak)

30. $\int_0^{\infty} \frac{x+1}{2x^3+1} dx$ Iraksak? yakınsak? (Cevap: Yakınsak)

31. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x \sin x} dx$ Iraksak? yakınsak? (Cevap: Iraksak)

32. $\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$ yakınsak? Iraksak? (Cevap: Yakınsak)

33. $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx$ yakınsak? iraksak? (Cevap: Iraksak)

34. Aşağıdaki kutupsal denklemlerin yerine gelecek kartezyen denklemleri bulunuz:

(a) $r = \cot \theta \csc \theta$, (b) $r = \csc \theta e^{r \cos \theta}$, (c) $r = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta$

Cevaplar: (a) $x = y^2$, (b) $y = e^x$, (c) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$

35. Aşağıdaki kartezyen denklemlerin dengi olan polar denklemleri bulunuz:

(a) $x = y$, (b) $x^2 + y^2 = 4$, (c) $x^2 - y^2 = 1$, (d) $x^2 + (y-2)^2 = 4$

(Cevaplar: (a) $\theta = \frac{\pi}{4}$, (b) $r = 2$ veya $r = -2$, (c) $r^2 = \sec 2\theta$, (d) $r = 4 \sin \theta$)

36. Aşağıdaki kutupsal denklemleri verilen eğrileri çiziniz:

(a) $r = 1 + 2 \sin \theta$, (b) $r = 1 + \cos \theta$, (c) $r = \cos 3\theta$, (d) $r^2 = \cos 2\theta$

37. $r = 3 \sin \theta$ çemberini ve $r = 1 + \sin \theta$ kardiyoidini çiziniz.

(a) Çemberle kardiyoidin kesim noktalarını bulunuz.

(b) Çemberin içinde ve kardiyoidin dışında kalan bölgeyi çiziniz.

(c) (b)'de çizilen bölgenin alanını bulunuz.

38. $r = 1 + \sin \theta$ kardiyoid eğrisinin uzunluğunu bulunuz. (Cevap: 8)

39. $r = 2 \cos \theta$ çemberinin içinde ve $r = 1$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz. (Cevap: $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$)

40. $r^2 = \cos 2\theta$ kutupsal eğrisi x-ekseni etrafında döndürülünce meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

(Cevap: $2\pi(2 - \sqrt{2})$)

41. Aşağıdaki dizilerin varsa limitini bulunuz:

(a) $\frac{5n+7}{3n-1}$, (b) $\frac{n+1}{e^n}$, (c) $\frac{\sin n}{n^2}$, (d) $\frac{(-1)^n}{n}$, (e) $\frac{n!}{n^n}$

42. $\{a_n\}$ dizisi $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) eşitlikleri ile tanımlanıyor. Bu dizinin;

(a) artan , (b) üstten 3 ile sınırlı , (c) yakınsak ve limitinin 3 olduğunu gösteriniz.

43. Aşağıdaki dizilerin yakınsaklıklarını veya iraksaklıklarını inceleyiniz. Yakınsak iseler limitlerini bulunuz.

a) $a_n = \frac{\ln n}{n}$ (yak, 0)

b) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ (yak, 1)

c) $a_n = \frac{n!}{3^n}$ (iraksak)

d) $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ (yak, 1)

e) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n}$ (yak, 0)

f) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, & n\text{tek ise} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, & n\text{çift ise} \end{cases}$ (yak, $\frac{1}{2}$)

g) $a_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ (yak, 0)

h) $a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ (yak, $\frac{1}{2}$)

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = ?$

44. Aşağıda verilen serilerin yakınsak veya iraksaklılığını belirleyiniz. Yakınsak seriler için toplamlarını bulunuz:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} 3^k$, (b) $\sum_{k=0}^{\infty} 5 \left(-\frac{1}{3}\right)^k$, (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, (d) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{4^k}\right)$

45. Aşağıda verilen serilerin yakınsak veya iraksaklılığını belirleyiniz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$, (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$, (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k \ln k}$, (d) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$

46. Verilen serilerin yakınsak veya iraksaklılığını belirleyiniz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} k}{1+k^2}$, (b) $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{k^4+2k-1}{k^5+3k^2+1}$, (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+2}$, (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos k}{k}$

47. Aşağıdaki serilerin yakınsak veya iraksak olup olmadıklarını belirleyiniz. Yakınsak olanların (toplamını) değerini bulunuz.

a) $1 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{16} + \cdots$ (iraksak)

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n} \right)$ (yak, 3)

c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$ (yak, $\frac{e^2}{e^3-1}$)

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ (iraksak)

e) $0.\overline{91} = \sum_{n=1}^{\infty} 91 \left(\frac{1}{100}\right)^n$ (yak, $\frac{91}{99}$)

f) $\frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - \frac{9}{4.5} + \cdots$ (yak, 1)

g) $\sum_{n=0}^{\infty} e^n \pi^{1-n}$ (yak, $\frac{\pi^2}{\pi-e}$)

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (yak, $\frac{1}{4}$)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n+1) - \arctan(n))$ (yak, $\frac{\pi}{4}$)

48. Aşağıdaki serilerin yakınsak veya iraksaklılıklarını belirleyiniz, nedenlerini açıklayınız.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin n}{n^2}$ (yak)

b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ (iraksak)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n^2 + 3)}}$ (iraksak)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n - 1}$ (yak)

e) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2 - 5}$ (yak)

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ (yak)

g) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-n}$ (yak)

h) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k \ln(\ln k)}$ (iraksak)

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)$ (yak)

49. Aşağıdaki serilerin iraksaklıklarını veya yakınsaklık türlerini belirleyiniz.

a) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$ (koşullu yakınsak)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{e^{2n}}$ (mutlak yakınsak)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ (koşullu yakınsak)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ (iraksak)

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n}$ (koşullu yakınsak)

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (koşullu yakınsak)

50. Aşağıdaki serilerin yakınsaklıklarını veya iraksaklıklarını belirleyiniz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^5}$ (yakınsak)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{e^{n^2}}$ (yakınsak)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^n}{(n+1)^n}$ (yakınsak)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$ (yakınsak)

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$ (iraksak)

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ olduğunu gösteriniz.

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$, ($c \in R$ sabit olmak üzere) olduğunu gösteriniz.

51. Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık kümelerini ve yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n!}$ $((-\infty, \infty), R = \infty)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ $([-1, 1], R = 1)$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$ ($[-1, 1]$, $R = 1$)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2^n}{n^2} \right) x^n$ ($[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $R = \frac{1}{2}$)

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} (x+5)^n$ ($[-6, 4]$, $R = 5$)

f) $\sum_{n=0}^{\infty} 10^n \left(\frac{x-1}{5} \right)^n$ ($(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $R = \frac{1}{2}$)

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n!}$ ($[3, 5]$, $R = 1$)

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} x^{4n}$ ($(-1, 1)$, $R = 1$)

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+2+\cdots+2^n) x^n$ ($(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $R = \frac{1}{2}$)

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{3^{n^2}}$ ($[-2, 0]$, $R = 1$)

52. Aşağıdaki fonksiyonların Maclaurin Serileri'ni bulunuz.

a) $\frac{x}{2x+1}$ ($\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^{n+1}$)

b) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ ($\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n-1}$)

c) $\frac{x^2}{1-x^3}$ ($\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+2}$)

d) $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ ($\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) x^n$)

e) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ($2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$)

f) $\frac{1-x}{1+x^2} (= 1 - x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 - x^6 + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^n$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: tam değer fonksiyonu

g) $f(x) = \ln x$ in $x = 1$ deki Taylor serilerini bulunuz. ($\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$)

h) $f(x) = \sin x$ in $x = \frac{\pi}{2}$ deki Taylor serisini bulunuz.

$$(\sin x = 1 - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{6!}(x - \frac{\pi}{2})^6 + \cdots)$$

i) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nin $x = 1$ deki Taylor serilerini bulunuz.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n \right)$$

j) $f(x) = e^x$ in $x = 2$ deki Taylor serisini bulunuz. ($e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}$)