TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2014-2015 BAHAR DÖNEMİ

MAT-102 MATEMATİK II - FİNAL SINAVI

06 Nisan 2015

Adı Soyadı: CEVAP ANAHTARI

Numarası:

NOT: Sınav süresi 110 dakikadır.

1. Soru	2. Soru	3. Soru	4. Soru	5. Soru	6. Soru	7. Soru	TOPLAM

1. (20 puan)

$$f(x) = e^{-x/2}$$

fonksiyonun $x = 2$ deki Taylor serisi açılımını bulunuz. Elde ettiğiniz serinin yakınsaklık aralığını ve yarıçapını belirleyiniz.

$f(x) = e^{-x/2}$ $\qquad$ $f(2) = e^{-1}$

$f'(x) = -\frac{1}{2} e^{-x/2}$ $\qquad$ $f'(2) = -\frac{1}{2} e^{-1}$

$f''(x) = \frac{1}{2^2} e^{-x/2}$ $\qquad$ $f''(2) = \frac{1}{2^2} e^{-1}$

$f'''(x) = -\frac{1}{2^3} e^{-x/2}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1}{2^n} e^{-x/2}$ $\qquad$ $f^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{1}{2^n} e^{-1}$

$$e^{-x/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{1}{2^n} e^{-1}}{n!} (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{e \cdot 2^n \cdot n!} (x-2)^n$$

Oran kriterinden:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (x-2)^{n+1}}{e\, 2^{n+1}\, (n+1)!} \cdot \frac{e\, 2^n\, n!}{(-1)^n (x-2)^n} \right|$$

$$= |x-2| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0 < 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R} \text{ için})$$

O halde, Yakınsaklık yarıçapı $= \infty$

Yakınsaklık aralığı $= (-\infty, \infty)$

2. (13 puan) $y = 102 + 2x^{3/2}$ ile verilen eğrinin $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları arasında kalan kısmının uzunluğunu hesaplayınız.

$$y = 102 + 2x^{3/2}, \quad y' = 3x^{1/2}$$

Belirtilen eğrinin uzunluğu $= \int_{x=0}^{1} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{x=0}^{1} \sqrt{1+9x}\,dx$

$u = 1+9x$
$du = 9dx$
$x=0 \Rightarrow u=1$
$x=1 \Rightarrow u=10$

$$= \frac{1}{9}\int_{u=1}^{10} u^{1/2}\,du = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(u^{3/2}\Big|_1^{10}\right)$$

$$= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

3. $g(x,y) = y\ln x$ fonksiyonu veriliyor:

a. (8 puan) $z = g(x,y)$ ile belirlenen yüzeye $(1,4,0)$ noktasında teğet olan düzlemin denklemini bulunuz.

$(1,4,0) \Rightarrow x_0 = 1,\ y_0 = 4$ ve $z_0 = 0$.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \ln x \ ; \quad \frac{\partial g}{\partial x}(1,4) = 4, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,4) = 0$$

$$z - z_0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z - 0 = 4(x-1) + 0(y-4)$$

$$z = 4x - 4$$

$$\boxed{z - 4x - 4 = 0}$$

b. (7 puan) Kısmi türevi kullanarak $(3.99)\ln(1.03)$ sayısının değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

$a = 1,\ b = 4,\ g(x,y) = y\ln x$ alalım. Öyleyse

$$g(a+\Delta x, b+\Delta y) \cong g(a,b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\cdot\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\cdot\Delta y$$

$$(3.99)\ln(1.03) = g\left(1+(0.03),\ 4+(-0.01)\right)$$

$$= \underbrace{g(1,4)}_{0} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(1,4)}_{4}\cdot(0.03) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(1,4)}_{0}(-0.01)$$

$$= 4\cdot(0.03) = 0.12$$

4. (12 puan) $x = s + 2t$, $y = \frac{s}{t}$ ve $z = 2st$ olmak üzere

$$w = z - (e^{xy}\tan y)$$

fonksiyonunun $\frac{\partial w}{\partial t}$ kısmi türevini $(s,t) = (0,1)$ noktasinda **zincir kuralı** ile hesaplayınız.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= (-ye^{xy}\tan y)(2) + (-xe^{xy}\tan y - e^{xy}\sec^2 y)\left(\frac{-s}{t^2}\right) + (1)(2s)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{(s,t)=(0,0)} = 0.2 + (\cdots)(0) + (1)(0) = 0$$

5. (15 puan) $f(x,y) = x^2y$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 = 3$ eğrisi üzerindeki maksimum ve minumum değerlerini **Lagrange Çarpanları Metodu** ile hesaplayınız.

$f(x,y) = x^2y$ ve $g(x,y) := x^2+y^2$ olmak üzere

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy = \lambda 2x & \text{--- (1)} \\ x^2 = \lambda 2y & \text{--- (2)} \\ x^2+y^2 = 3 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

(i) Eğer $\lambda = 0$ ise (2)'den $x=0$ olup (1) denk. sağlanır, (3)'den ise $y = \mp\sqrt{3}$ olur

(ii) Eğer $\lambda \neq 0$ ise (1)'den $2x(y-\lambda) = 0 \Rightarrow$ ya $x=0$ yada $y=\lambda$

Dikkat edilirse: Şayet $y=0$ ise $x=0$ olmak zorunda (2'den) Bu ise $x^2+y^2=3$ olması ile çelişir.

O halde $x=0$ olduğunda (i)'den $y=\mp\sqrt{3}$ olur ki $(0,\mp\sqrt{3})$ noktasını elde ederiz. $f(0,\mp\sqrt{3}) = 0$.

Diğer taraftan $y=\lambda$ ise $x^2+y^2=3 \Rightarrow x^2+\lambda^2=3 \overset{(2)}{\Rightarrow} 3\lambda^2=3$

$\lambda^2 = 1$. $\therefore \boxed{y = \mp 1}$

$x^2 = \lambda 2y \Rightarrow x^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow x^2 = 2$

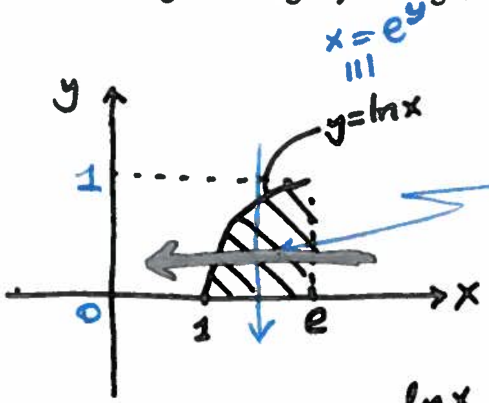
$\therefore \boxed{x = \mp\sqrt{2}}$

$f(\mp\sqrt{2}, 1) = 2$, $f(\mp\sqrt{2}, -1) = -2$, $f(0, \mp\sqrt{3}) = 0$

Maks. Değer   Min. Değer

6. (10 puan) $h(x,y)$ fonksiyonu xy-düzleminde sürekli bir fonsiyon olsun. Aşağıdaki iki katlı integralin integrasyon bölgesini çiziniz ve integral alma sırasını degiştiriniz:

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} h(x,y)\,dy\,dx.$$

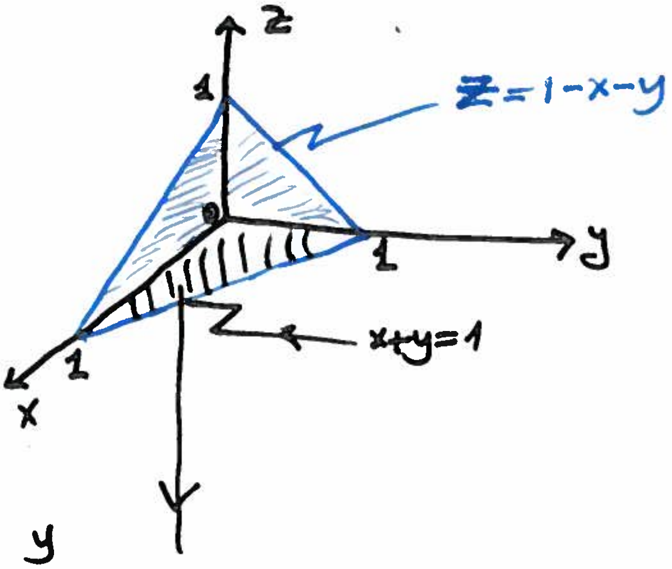


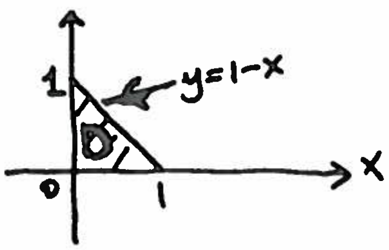
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x\le e,\ 0\le y\le \ln x\}$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le 1,\ e^y\le x\le e\}$$

$$\int_{x=1}^{e}\int_{y=0}^{\ln x} h(x,y)\,dy\,dx = \int_{y=0}^{1}\int_{x=e^y}^{e} h(x,y)\,dx\,dy$$

7. (15 puan) **Üstten** $x+y+z=1$ yüzeyi, **alttan** $x=0$, $y=0$ ve $x+y=1$ doğruları arasında kalan üçgen bölge ve **yanlardan** ise xz ve yz düzlemleri ile sınırlanan katı cismin hacmini **iki katlı integral** kullanarak hesaplayınız.





$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$$

$$\text{Hacim}=\iint_D f(x,y)\,dA$$

$$=\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x}(1-x-y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_{x=0}^{1}\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right)dx$$

$$=\int_{x=0}^{1}\left\{(1-x)-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right\}dx$$

$$=-\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{6}\Big|_0^1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}\ \text{br}^3$$