

MAT 201 DOĞRUSAL CEBİR ÇALIŞMA SORULARI 1

1. $x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$ doğrusal denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 5x_1 - 3x_2 = 7 \end{cases}$ denklem sistemini Gauss-Jordan yöntemiyle çözünüz.

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

4. $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ olsun. $ad - bc \neq 0$ ise A matrisinin çarpmaya göre tersinin bulunduğunu ve

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

olduğunu gösteriniz.

5. A matrisi ters simetrik bir matris ise bu matrisin köşegenindeki bileşenlerinin sıfır olduğunu gösteriniz.

6. A simetrik ve B antisimetrik matris olmak üzere $A + B = 0$ ise $A = 0$ ve $B = 0$ olduğunu gösteriniz.

7. 4×5 tipinde satırca basamak matrisine bir örnek veriniz.

8. 4×5 tipinde sütunca indirgenmiş basamak matrisine bir örnek veriniz.

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 13 & 3 \end{bmatrix}$ olduğuna göre AQ matrisi, sütunca indirgenmiş basamak

matrisi olacak biçimde bir Q tersinir matrisi bulunuz.

Çözüm: $[A^T I_4]$ matrisini A matrisinin yerine satırca indirgenmiş basamak matris gelecek biçimde indirgeyeceğiz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 13 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 13 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (-6)R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ \sim \\ 7R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \\ (-2)R_1 + R_4 \rightarrow R_4 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & -24 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 17 & 34 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1R_4 + R_1 \rightarrow R_1 \\ \sim \\ (-6)R_4 + R_2 \rightarrow R_2 \\ 8R_4 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 8 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} {}^{2R_2+R_4 \rightarrow R_4} \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 8 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 2 & -20 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 1 & -9 \\ -6 & 1 & 0 & 6 \\ 17 & 0 & 2 & -20 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad Q^T A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan $Q = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -6 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & 6 & -20 \end{bmatrix}$ elde edilir. $Q^T A^T = (AQ)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

olduğundan $AQ = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur. AQ matrisi sütunca indirgenmiş basamak matrisidir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 13 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 & -6 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & 6 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca görülebilir. \square

10. $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -4 & 14 \\ 3 & 2 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & 6 & -3 & 12 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A matrisine denk olan hem satırca hem de

sütunca indirgenmiş basamak matrisini bulunuz. Bu matris B ise $PAQ = B$ olacak biçimde P ve Q tersinir matrisleri bulunuz.

Çözüm: Önce PA matrisi satırca indirgenmiş basamak matrisi olacak biçimde bir P matrisi bulalım. $[A \ I_3]$ matrisini yazıp bu matrisi A matrisinin yerine satırca indirgenmiş basamak matris gelecek biçimde indirgeyeceğiz.

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & -4 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -3 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_2+R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -3 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c} (-3)R_1+R_2 \rightarrow R_2 \\ \sim \\ 1R_1+R_3 \rightarrow R_3 \\ (-6)R_1+R_4 \rightarrow R_4 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 & -6 & 12 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 & -6 & 12 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} (-1)R_2+R_1 \rightarrow R_1 \\ \sim \\ 2R_2+R_3 \rightarrow R_3 \\ 3R_2+R_4 \rightarrow R_4 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ & \sim \begin{array}{l} \frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad PA = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi $(PA)Q$ matrisi sütunca indirgenmiş basamak matrisi olacak biçimde bir Q matrisi bulmak istiyoruz. Bunun için önce $[(PA)^T I_n]$ matrisini A matrisinin yerine satırca indirgenmiş basamak matris gelecek biçimde indirgeyeceğiz.

$$\begin{aligned} [(PA)^T I_n] &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1R_1+R_3 \rightarrow R_3 \\ \sim \\ (-2)R_1+R_4 \rightarrow R_4 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-\frac{1}{2})R_2+R_3 \rightarrow R_3 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \\ \text{olur. } [(PA)^T I_n] &= [Q^T (PA)^T Q^T] \text{ olmalıdır. Buna göre } Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buradan $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ elde edilir. Böylece, PAQ matrisi hem satırca hem de

sütunca indirgenmiş matris olacak biçimdeki P ve Q matrisleri bulunmuş olur.

$$PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 & -4 & 14 \\ 3 & 2 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & 6 & -3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca görülebilir. \square

$$11. A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 & -5 \\ 2 & -18 & -50 & -20 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 9 & 25 & 10 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre } A \text{ matrisine denk olan hem satırca hem}$$

de sütunca indirgenmiş basamak matrisini bulunuz. Bu matris B ise $PAQ = B$ olacak biçimde P ve Q tersinir matrisleri bulunuz.

Çözüm: Önce PA matrisi satırca indirgenmiş basamak matrisi olacak biçimde bir P matrisi bulalım. $[A \ I_3]$ matrisini yazıp bu matrisi A matrisinin yerine satırca indirgenmiş basamak matris gelecek biçimde indirgeyeceğiz.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -18 & -50 & -20 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 25 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} -1 & 9 & 25 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -18 & -50 & -20 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{2R_1+R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} -1 & 9 & 25 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 45 & 15 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} -1 & 9 & 25 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 45 & 15 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{2R_1+R_4 \rightarrow R_4} \begin{bmatrix} -1 & 9 & 25 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 45 & 15 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-9)R_2+R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -15 & 2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(-15)R_2+R_4 \rightarrow R_4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -15 & 2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(-1)R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -15 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -15 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi $(PA)Q$ matrisi sütunca indirgenmiş basamak matrisi olacak biçimde bir Q matrisi bulmak istiyoruz. Bunun için önce $[(PA)^T \ I_n]$ matrisini A matrisinin yerine satırca indirgenmiş basamak matris gelecek biçimde indirgeyeceğiz.

$$\begin{aligned} & [(PA)^T \ I_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_1+R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{1R_1+R_4 \rightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)R_2+R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(-1)R_2+R_4 \rightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. $[(PA)^T \ I_n] = [Q^T (PA)^T \ Q^T]$ olmalıdır. Buna göre $Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dır.

Buradan $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ elde edilir. Böylece, QAP matrisi hem satırca hem de

sütunca indirgenmiş matris olacak biçimdeki Q ve P matrisleri bulunmuş olur.

$$PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -15 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 & -5 \\ 2 & -18 & -50 & -20 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 9 & 25 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca görülebilir. \square

12. $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

Her $p \in \mathbb{Z}^+$ için $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} \cos p\theta & \sin p\theta \\ -\sin p\theta & \cos p\theta \end{bmatrix}$ olur mu?

13. Homojen bir doğrusal denklem sisteminin tutarlı olduğunu, daha açık bir anlatımla en az bir çözümünün bulunduğunu gösteriniz.

14.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

denklem sistemini Gauss-Jordan yöntemiyle çözünüz.

15. I_3 matrisinde ikinci satır ile birinci satırın yerleri değiştirilerek elde edilen elementer matris P olsun. P matrisinin çarpmaya göre tersi var mıdır? P 'nin tersini bulunuz.

16. I_3 matrisinde ikinci satırın c katı üçüncü satıra eklenerek elde edilen elementer matris A olsun. A matrisinin çarpmaya göre tersi varsa bulunuz.

17. I_3 matrisinde, ikinci sütunun c katı birinci sütuna eklenerek elde edilen elementer matris P olsun. P matrisinin çarpmaya göre tersi varsa bulunuz.

18. $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^{-1} matrisi varsa elementer satır işlemlerinden

bulunuz.

19. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + (a^2 - 14)x_3 &= a + 2 \end{aligned} \quad (1) \quad \begin{array}{l} \text{lineer denklem} \\ \text{sistemi veriliyor.} \end{array}$$

(a) a sayısının hangi değerleri için (1) denklem sistemi tutarsız olur?

(b) a sayısının hangi değerleri için (1) denklem sisteminin sonsuz çoklukta çözümü vardır?

(c) a sayısının hangi değerleri için (1) denklem sisteminin bir tek çözümü vardır?

20. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_3 &= 2 \\ (a^2 - 4)x_3 &= a + 2 \end{aligned} \quad (1) \quad \begin{array}{l} \text{lineer denklem} \\ \text{sistemi veriliyor.} \end{array}$$

(a) a sayısının hangi değerleri için (1) denklem sistemi tutarsız olur?

(b) a sayısının hangi değerleri için (1) denklem sisteminin sonsuz çoklukta çözümü vardır?

(c) a sayısının hangi değerleri için (1) denklem sisteminin bir tek çözümü vardır?

21. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + (\lambda - 3)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1) \quad \begin{array}{l} \text{lineer denklem} \\ \text{sistemi veriliyor.} \end{array}$$

λ sayısının hangi değerleri için (1) denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı çözümleri vardır?

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^3 , A^{-3} ve $A^3 - 2A + I$ matrislerini hesaplayınız.

23. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

(a) $p(x) = x - 3$ olduğuna göre $p(A)$ nedir?

(b) $p(x) = x^2 + 3x - 3$ olduğuna göre $p(A)$ nedir?

24. A matrisi, $A^2 - 3A + I = 0$ eşitliğini sağlayan bir kare matris olduğuna göre $A^{-1} = 3I - A$ olduğunu gösteriniz.

25. Bir matrisin bir satırındaki bütün bileşenler sıfır ise bu matrisin çarpmaya göre tersi bulunabilir mi?

26. Aynı basamaktan tersinir iki matrisin toplamı da tersinir olur mu?

27. Aşağıdaki eşitliklerin her biri için bu eşitliği doğrulayan X matrisi varsa bulunuz.

(a) $X \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$(b) X \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$28. \begin{aligned} ax + by - 3z &= -3 \\ -2x - by + cz &= -1 \\ ax + 3y - cz &= -3 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümü, $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$ olacak biçimde a , b , c sayıları varsa bulunuz.

29. Aşağıda verilen matrislerde hangi k sayıları için A matrisi tekil (singular) matris olur?

$$(a) \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

30. Doğruca hesaplamadan

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

31. A ve B , $n \times n$ türünde matrisler ve A tersinir matris ise $\det B = \det(A^{-1}BA)$ olduğunu gösteriniz.