MAT 212 ÖDEV 3   27 Ekim 2016

1. Aşağıdaki matrislerin köşegenleştirilebilir olup olmadığını belirleyiniz.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.

▶ Alıştırmalar 16–21'de, A matrisinin her özdeğerinin geometrik ve cebirsel katlılığını bulunuz ve A nın köşegenleştirilebilir olup olmadığını belirleyiniz. Eğer A köşegenleştirilebilir ise, A yı köşegenleştiren bir P matrisi bulunuz ve $P^{-1}AP$ yi hesaplayınız. ◀

16. $A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix}$ **17.** $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3.

32. A köşegenleştirilebilir ise, A nın rankının A nın sıfırdan farklı özdeğerleri sayısına eşit olduğunu ispatlayınız.

33. Bir A matrisinin karakteristik polinomunun $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)^3$ olarak bulunduğunu varsayalım. Her şıkta, soruyu cevaplayınız ve çıkarımınızı açıklayınız.

(a) A nın özuzaylarının boyutları hakkında ne söyleyebilirsiniz?

(b) A nın köşegenleştirilebilir olduğunu biliyorsanız özuzayların boyutları hakkında ne söyleyebilirsiniz?

(c) Eğer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, hepsi A nın aynı özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin lineer bağımsız bir kümesi ise, özdeğer hakkında ne söyleyebilirsiniz?

4.

22. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, Örnek 5'in metodunu kullanarak A^{10} u hesaplayınız

5.

▶ Alıştırmalar 19–22'de, her C matrisi (15) formundadır. Teorem 5.3.7 C nin $|\lambda|$ çarpanlı bir ölçeklendirme matrisi ile ϕ açılı bir döndürme matrisinin çarpımı olduğu belirtir. $-\pi < \phi \le \pi$ olmak üzere $|\lambda|$ ve ϕ yi bulunuz.◀

19. $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **20.** $C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

6.

. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ olsun. Hangilerinin R^3. üzerinde iç çarpım olduğunu belirleyiniz. Olmayanlar için, geçerli olmayan aksiyomları listeyiniz.

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$

(b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

(c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$

(d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

7.

(*Kalkülüs gerekli*) Her şıkta, $C[0, 1]$ üzerindeki

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

iç çarpımını kullanarak $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ yi hesaplayınız.

(a) $\mathbf{f} = \cos 2\pi x, \quad \mathbf{g} = \sin 2\pi x$

(b) $\mathbf{f} = x, \quad \mathbf{g} = e^x$

(c) $\mathbf{f} = \tan \frac{\pi}{4}x, \quad \mathbf{g} = 1$

8.

21. $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$, V nin bir W alt uzayının bazı olsun. $W^{\perp}$ nin her baz vektörüne ortogonal olan V deki tüm vektörlerden oluştuğunu gösteriniz.

22. Teorem 6.2.3'ün şu genelleştirilmesini ispatlayınız: Eğer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ bir V iç çarpım uzayında ikişerli ortogonal vektörler ise

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_r\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \cdots + \|\mathbf{v}_r\|^2$$

24. Cauchy–Schwarz eşitsizliğini kullanarak a, b ve θ nın her reel değeri için

$$(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 \leq a^2 + b^2$$

olduğunu ispatlayınız.

9.

(*Kakülüs gerekli*) $C[0,\pi]$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

iç çarpımına sahip ve $\mathbf{f}_n = \cos nx \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ olsun. Eğer $k \neq l$ ise, $\mathbf{f}_k$ ve $\mathbf{f}_l$ nin ortogonal olduğunu gösteriniz.

10.

. R^3 Euclid iç çarpımına sahip olsun. Gram– Schmidt yöntemini kullanarak $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ bazını bir ortonormal baza dönüştürünüz.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$