

## MAT 309 Cebir - Çalışma Problemleri-Halka-Cisim

1. Aşağıdaki ifadeler doğru ise ispatlayınız, yanlış ise aksine bir örnek veriniz.
  - (a)  $\mathbb{Z}^+$  kümesi bir halka oluşturur.
  - (b)  $n \in \mathbb{Z}$  için  $n\mathbb{Z}$  kümesi bir cisim oluşturur.
  - (c)  $\{a + b\sqrt{6}\}$  kümesi bir halka oluşturur.
  - (d) Her halka bir cisimdir.
  - (e) Her cisim bir halkadır.
  - (f) Her sonlu tamlık bölgesi bir cisimdir.
  - (g) Her halkanın çarpımsal birim elemanı mevcuttur.
  - (h)  $n\mathbb{Z}$  nin karakteristiği  $n$  dir.
2.
  - (a)  $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$  denklemini  $\mathbb{Z}_{12}$  de çözünüz.
  - (b)  $2x = 3$  denklemini  $\mathbb{Z}_{23}$  cisminde çözünüz.
  - (c)  $x^2 + x + 1$  polinomunun  $\mathbb{F}_5[x]$  te indirgenemez olduğunu gösteriniz.
  - (d)  $x^5 + 1$  polinomunu  $\mathbb{F}_2[x]$  te çarpanlarına ayırınız.
  - (e)  $p$  bir asal sayı olmak üzere  $x^4 + 1$  polinomunun  $\mathbb{F}_p[x]$  te indirgenemez olduğunu gösteriniz.
3.
  - (a)  $\mathbb{Z}_{24}$  ün çarpımsal tersi mevcut olan elemanlarını bulunuz. Bu elemanların oluşturduğu küme cisim oluşturur mu?
  - (b)  $R$  tamlık bölgesi olmak üzere  $a, b, c \in R$  ve  $a \neq 0$  olsun. Eğer  $ab = ac$  olduğu biliniyorsa  $b = c$  olduğunu gösteriniz.
  - (c)  $R$  değişmeli halka ve  $a \in R$  için  $L_a := \{x \in R \mid xa = 0\}$  kümesinin bir ideal olduğunu gösteriniz.
  - (d)  $R$  bir halka olmak üzere  $I$  ve  $J$ ,  $R$  nin ideal'leri ise  $I \cap J$  nin de  $R$  nin ideali olduğunu gösteriniz.
  - (e)  $R$  bir tamlık bölgesi olmak üzere  $\text{char}(R) = 0$  veya  $\text{char}(R) = p$  olduğunu gösteriniz.
4.  $\mathbb{Q}$  cismi üzerinde aşağıdaki polinomların *OBEB*'ini bulunuz
  - (a)  $3x^2 + 1$  ve  $x^6 + x^4 + x + 1$
  - (b)  $x^3 - 1$  ve  $x^7 - x^4 + x^3 - 1$
5.
  - (a)  $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$  olduğunu gösteriniz.
  - (b)  $n \in \mathbb{Z}^+$  ve  $n$ -tek sayı olmak üzere  $n \mid 3^n + 1$  şartını sağlayan tüm  $n$  tamsayılarını bulunuz.
  - (c)  $n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere  $n \mid 2^n - 1$  şartını sağlayan tüm  $n$  tamsayılarını bulunuz.