

Mat 309 Cebir ÖDEV 1 – 22 Ocak 2016

1. Determine whether the given relation is an equivalence relation on the set. Describe the partition arising from each equivalence relation.

31. $x \mathcal{R} y$ in \mathbb{R} if $|x| = |y|$

32. $x \mathcal{R} y$ in \mathbb{R} if $|x - y| \leq 3$

33. $n \mathcal{R} m$ in \mathbb{Z}^+ if n and m have the same number of digits in the usual base ten notation

2.

2.26 Table

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	b	d
b	b	c	a	e	c
c	c	a	b	b	a
d	b	e	b	e	d
e	d	b	a	d	c

Exercises 1 through 4 concern the binary operation $*$ defined on $S = \{a, b, c, d, e\}$ by means of Table 2.26.

1. Compute $b * d$, $c * c$, and $[(a * c) * e] * a$.
2. Compute $(a * b) * c$ and $a * (b * c)$. Can you say on the basis of this computations whether $*$ is associative?
3. Compute $(b * d) * c$ and $b * (d * c)$. Can you say on the basis of this computation whether $*$ is associative?

4. Is $*$ commutative? Why?

3.

X ile herhangi bir kümeyi, $\mathcal{P}(X)$ ile X in kuvvet kümesini, Δ ile simetrik farkı (yani $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ifadesini) gösterelim. Buna göre aşağıdaki yapıların bir grup, monoid veya yarıgrup olup olmadıklarını inceleyiniz.

- $(\mathcal{P}(X), \cup)$
- $(\mathcal{P}(X), \cap)$
- $(\mathcal{P}(X), \Delta)$

4.

Eleman sayısı 4 olan ve birbirine izomorf olmayan kaç farklı grup vardır? Hesaplayarak bulunuz. Grup tablolarını yapınız.

5. Aşağıda verilen G kümesi, ilgili işlemle beraber bir grup oluşturup oluşturmadığını gösteriniz.

(a) $G = \mathbb{Z}$ ve $a * b = a + b + ab$

(b) $G = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ ve $a * b = a + b + ab$

(c) $G = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid OBEB(p, q) = 1 \text{ ve } 5 \mid q \right\}$ ve $a * b = a + b$

6. $H := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a^2 + b^2 = 1\}$ olmak üzere H nin \mathbb{C}^* grubunun bir altgrubu olduğunu gösteriniz. (Burada \mathbb{C}^* -sıfırdan farklı kompleks sayıların kümesi ve işlemi ise kompleks sayılardaki çarpma işlemidir).

7. p bir asal sayı olmak üzere $G := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p \text{ ve } \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0 \right\}$

(Not: matriste, mod p ye göre işlem yapılmaktadır.)

(a) Matris çarpımına göre G nin bir grup oluşturduğunu gösteriniz.

(b) G nin mertebesini bulunuz.

8. $G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ grubunda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ise $\langle A \rangle$ ve $\langle B \rangle$ devirli gruplarını bulunuz.

9. İspatları açıkça ifade ediniz.

(a) G grubunun mertebesi çift olduğunu varsayalım. $a \neq e$ ve $a^2 = e$ şartını sağlayan $a \in G$ nin mevcut olduğunu gösteriniz.

(b) a ve b herhangi bir grubun elemanları olmak üzere ab ve ba elemanlarının mertebelerinin eşit olduğunu gösteriniz.

10. \mathbb{Z}_{60} ın tüm altgruplarını bulunuz ve altgrup diagramında gösteriniz.