MAT 535 Cebir I Ödev 1 (22 Ocak 2016)

1. $H := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}$ ve $a^2 + b^2 = 1\}$ olmak üzere H nin $\mathbb{C}^*$ grubunun bir altgrubu olduğunu gösteriniz. (Burada $\mathbb{C}^*$-sıfırdan farklı komplex sayıların kümesi ve işlemi ise komplex sayılardaki çarpma işlemidir).

2. p bir asal sayı olmak üzere $G := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p \text{ ve } \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0 \right\}$

   (Not: matriste, $\operatorname{mod} p$ ye göre işlem yapılmaktadır.)

   (a) Matris çarpımına göre G nin bir grup oluşturduğunu gösteriniz.

   (b) G nin mertebesini bulunuz.

3. $G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$ grubunda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ise $\langle A \rangle$ ve $\langle B \rangle$ devirli gruplarını bulunuz.

4. İspatları açıkça ifade ediniz.

   (a) G grubunun mertebesi çift olduğunu varsayalım. $a \neq e$ ve $a^2 = e$ şartını sağlayan $a \in G$ nin mevcut olduğunu gösteriniz.

   (b) a ve b herhangi bir grubun elemanları olmak üzere ab ve ba elemanlarının mertebelerinin eşit olduğunu gösteriniz.

5. $\mathbb{Z}_{60}$ ın tüm altgruplarını bulunuz ve altgrup diagramında gösteriniz.

6. Let G be a finite non empty set with an operation $*$ such that:

   (a) G is closed under $*$.

   (b) $*$ is associative.

   (c) Given $a, b, c \in G$ with $a * b = a * c$, then $b = c$.

   (d) Given $a, b, c \in G$ with $b * a = c * a$, then $b = c$.

   Prove that G must be a group under $*$. Give an example to show that this result can be false if G is an infinite set.

7. If G is a finite group of even order, show that there must be an element $a \neq e$ such that $a = a^{-1}$

8. Hungerford: page 34 exercise 11.

9. Let G be a group in which $(ab)^3 = a^3b^3$ and $(ab)^5 = a^5b^5$ for all $a, b \in G$. Show that G is abelian.

10. If G is a group and $a \in G$, define $\sigma_a : G \to G$ by $\sigma_a(g) = aga^{-l}$.

    (a) Show that σ_a is an isomorphism of G onto itself so $\sigma_a \in A(G)$, the group of automorphisms of G. Define $\psi : G \to A(G)$ by $\psi(a) = \sigma_a$. Prove that:

    (b) ψ is a homomorphism of G into $A(G)$.

    (c) $Ker\psi = Z(G)$, the center of G.